

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ И ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

Ю.Н. Паришин, И.И. Фролов**РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ
СТРУКТУРЕ ИЗМЕРЕНИЙ**

Проведен синтез рекуррентного алгоритма оценивания амплитудно-фазового распределения сигналов на раскрыве антенной решетки. Получены уравнения, описывающие функционирование линейного фильтра оценивания амплитудно-фазового распределения, а также квазилинейного фильтра оценивания фазового распределения при известном амплитудном распределении. Проведен анализ эффективности рекуррентных алгоритмов оценивания в зависимости от пространственной структуры измерений, установлено оптимальное значение величины углового сектора расположения точек измерений. Даны рекомендации по выбору начальных условий для рекуррентного фильтра оценивания.

Ключевые слова: рекуррентное оценивание, квазилинейный фильтр, амплитудно-фазовое распределение, антенная решетка, пространственная структура.

Введение. Для эффективного обнаружения, оценивания параметров и разрешения сигналов необходимо точное определение амплитудно-фазового распределения (АФР) на раскрыве антенной решетки (АР). Диагностика антенной решетки реализуется на основе различных методов: радиологических, модуляционных, коммутационных методов, а также методов реконструктивной диагностики [1-4]. За исключением радиологических, все выше перечисленные методы являются специализированными и применимы только для контроля АР. Радиологические методы являются универсальными и пригодными для диагностики как антенных решеток, так и антенн с непрерывным амплитудно-фазовым распределением.

Известные линейные алгоритмы оценивания АФР [5,6] предполагали определение комплексного АФР, в котором модуль и аргумент полагались неизвестными или случайными величинами. В последнем случае полагается, что комплексное АФР имеет гауссовское распределение, для которого модуль имеет релеевский закон распределения, а аргумент распределен равномерно. На основе полученной ранее оценки

АФР $\hat{\underline{X}}$ можно получить отдельно оценки модуля $\hat{X} = |\hat{\underline{X}}|$ и аргумента $\hat{\Phi} = \arg \hat{\underline{X}}$. Если оценка АФР оптимальна по критерию максимального правдоподобия, то полученные таким образом оценки модуля и аргумента также оптимальны по этому критерию.

Однако, эти оценки не являются оптимальными по критерию минимума среднего квадрата ошибки, так как операции вычисления модуля и аргумента нелинейные. Поэтому для получения среднеквадратичных оценок необходимо синтезировать нелинейный алгоритм оценивания. Необходимость такого алгоритма актуальна еще и потому, что для АР с фазовым управлением амплитудное распределение на раскрыве АР постоянно и может считаться известным с высокой точностью. Поэтому возникает задача оценивания фазового распределения при известном амплитудном распределении. Данная задача оценивания является нелинейной и не может быть решена методом обращения матрицы. Метод максимального правдоподобия [6,8] в этом случае также приводит к затратным в вычислительном отношении алгоритмам.

При большом числе элементов АР определенными преимуществами обладают рекуррентные алгоритмы оценивания АФР [5,8,10].

Цель работы – повышение качества оценивания АФР антенных решеток с амплитудно-фазовым и фазовым управлением при наличии ограничений на объем одновременно анализируемых данных.

Постановка задачи. Для решения этих задач перспективным является метод оптимального оценивания АФР в раскрыте антенны по измерениям сигнала на выходе диаграммообразующей схемы АР, полученных с помощью амплифазометра, с применением методов марковской теории оценивания случайных процессов [4,8,9]. Оцениваемые значения АФР в элементах АР считаются независимыми комплексными гауссовскими случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией D_X . Моделями случайных процессов, описывающих ошибки восстановления и измерения полей, также являются гауссовские случайные величины. Искомое АФР является векторной случайной величиной $\underline{X} = \{X_n, n = 1, \dots, N\}$ с корреляционной матрицей $\underline{R}_X = \underline{X}\underline{X}^H = D_X \mathbf{I}$, где n обозначает эрмитово сопряжение, $D_X = \mathbf{M}\{|X_n|^2\}$ – дисперсия. Представим АФР как вектор состояния некоторой динамической системы, динамика состояния которой описывается уравнением вида:

$$\underline{X}_{m+1} = \underline{X}_m, \quad \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1)$$

На выходе амплифазометра получаем измеренное значение комплексного сигнала с выхода АР при различных угловых положениях поворотного устройства с учетом ошибок измерения и шумов наблюдения:

$$\underline{Y}_m = \underline{A}_m \underline{X}_m + \underline{N}_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где $\underline{N}_m = N_{Rm} + jN_{Im}$ – комплексный гауссовский шум измерений с дисперсией $\mathbf{M}\{|\underline{N}_m|^2\} = D_N$, $\underline{A}_m$ – значение вектора-строки пространственного преобразования сигнала при m -м угловом положении поворотного устройства. Этот вектор также является m -й строкой матрицы пространственного преобразования

$$\underline{A} = \{A_{mn} e^{j\psi_{mn}}, m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N\}.$$

Так как от момента времени измерения m зависит угловое положение поворотного устройства, задаваемое матрицей пространственного преобразования $\underline{A}$, а также значение шумов наблюдения $\underline{N}_m$, то при неизменном во времени АФР (1) задача оценивания АФР может быть

сформулирована как частный случай рекуррентной фильтрации гауссовского процесса $\underline{X}_m = \underline{X}$ по результатам наблюдений этого процесса с ошибками. Полученные выше уравнения наблюдения (2) и уравнение состояния (1) дают полную формулировку задачи оценивания поля в раскрыте антенны в терминах пространства состояний.

В ряде случаев АР имеет только фазовое управление, а амплитудное распределение $\underline{X}_0 = |\underline{X}|$ известно. Задача заключается в оценивании только фазового распределения при известном амплитудном распределении в условиях действия шумов. В связи с этим привлекательным является применение рекуррентных алгоритмов фильтрации Калмана, расширенных на случай нелинейных моделей оцениваемых параметров [9,10]. Пусть вектор оцениваемых параметров представляет собой совокупность аргументов АФР

$$\underline{\Phi} = \arg \underline{X} = \{\Phi_n, n = 1, \dots, N\},$$

модуль АФР известен, а комплексное АФР определяется выражением

$$\underline{X} = \{X_{0n} e^{j\Phi_n}, n = 1, \dots, N\}.$$

Искомое фазовое распределение полагается гауссовским случайным процессом с корреляционной матрицей $\underline{R}_\Phi = \mathbf{M}\{\underline{\Phi}\underline{\Phi}^T\} = D_\Phi \mathbf{I}$, динамика вектора состояния которого описывается уравнением вида:

$$\underline{\Phi}_{m+1} = \underline{\Phi}_m, \quad \underline{\Phi}(t_0) = \underline{\Phi}_0.$$

На выходе амплифазометра получаем измеренное значение комплексного сигнала с выхода АР при различных угловых положениях поворотного устройства с учетом ошибок измерения и шумов наблюдения

$$\underline{Y}_m = Y_{Rm} + jY_{Im} = \underline{H}_m(\underline{\Phi}) + \underline{N}_m = \underline{A}_m \underline{X}_m(\underline{\Phi}) + \underline{N}_m, \quad m = 1, \dots, M.$$

Так как оцениваемый вектор $\underline{\Phi}$ нелинейно зависит от наблюдаемых данных, то целесообразно преобразовать наблюдения в векторную действительную форму:

$$\underline{Y}_m = \{Y_{Rm}, Y_{Im}\}, \quad \underline{H}_m = \{H_{Rm}, H_{Im}\} = \{ \text{Re}(\underline{A}_m \underline{X}_m(\underline{\Phi})), \text{Im}(\underline{A}_m \underline{X}_m(\underline{\Phi})) \}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3)$$

где $Y_{Rm} = H_{Rm}(\underline{\Phi}) + N_{Rm}$, $Y_{Im} = H_{Im}(\underline{\Phi}) + N_{Im}$ – квадратурные составляющие измеренного амплифазометром сигнала,

$$H_{Rm}(\underline{\Phi}) = \sum_{n=1}^N A_{mn} X_{0n} \cos(\psi_{mn} + \Phi_n),$$

$$H_{Im}(\underline{\Phi}) = \sum_{n=1}^N A_{mn} X_{0n} \sin(\psi_{mn} + \Phi_n) - \text{квадратурные составляющие полезного сигнала.}$$

Квадратурные составляющие шума наблюдения являются гауссовскими независимыми величинами с нулевым средним значением и диагональной корреляционной матрицей $\mathbf{R}_N = \mathbf{I}D_N$ размером $2M \times 2M$.

Получение основных соотношений. Представим постоянное во времени АФР в виде комплексного вектора состояния (1). Тогда для оценивания АФР можно применить известные уравнения многомерной оптимальной линейной фильтрации [5,8,10] комплексного случайного процесса, которые с использованием леммы об обращении матриц имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{m+1} &= \left(\mathbf{P}_m^{-1} + \frac{1}{D_N} \mathbf{A}_{m+1}^H \mathbf{A}_{m+1} \right)^{-1} = \\ &= \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_m \mathbf{A}_{m+1}^H \left(\mathbf{A}_{m+1} \mathbf{P}_m \mathbf{A}_{m+1}^H + \mathbf{I}D_N \right)^{-1} \mathbf{A}_{m+1} \mathbf{P}_m, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{A}_{m+1}^H \frac{1}{D_N}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{m+1} = \hat{\mathbf{X}}_m + \mathbf{K}_m (\mathbf{Y}_{m+1} - \mathbf{A}_{m+1} \hat{\mathbf{X}}_m), \quad m = 0, \dots, M-1, \quad (6)$$

где $\hat{\mathbf{X}}_{m+1}$ – оптимальная оценка комплексного АФР, $\mathbf{K}_{m+1}$ – комплексные оптимальные коэффициенты передачи линейного фильтра, $\mathbf{P}_{m+1}$ – ковариационная матрица ошибок оценивания.

Так как уравнения являются линейными относительно оцениваемого вектора и наблюдаемых данных, которые являются совместно гауссовскими, то получаемая в результате фильтрации оценка АФР (6) является оптимальной по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

В случае оценивания фазового распределения при известном амплитудном распределении используется квазилинейная фильтрация процесса Φ_m в присутствии шумов наблюдения. Для решения этой задачи запишем уравнения многомерной квазилинейной фильтрации [9] по критерию максимума апостериорной вероятности применительно для решаемой задачи оценивания фазового распределения по наблюдаемым данным (3):

- алгоритм фильтрации

$$\hat{\Phi}_{m+1} = \hat{\Phi}_m + \mathbf{K}_{m+1} (\mathbf{Y}_{m+1} - \mathbf{H}_{m+1}(\hat{\Phi}_m)), \quad (7)$$

- вычисление коэффициента передачи квазилинейного фильтра

$$\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{P}_{m+1} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_m}{\partial \hat{\Phi}} \right)^T \frac{1}{D_N}, \quad (8)$$

- вычисление ковариационной матрицы ошибок оценивания

$$\mathbf{P}_{m+1} = \left(\mathbf{P}_m^{-1} - \frac{\partial}{\partial \hat{\Phi}_m} \left[\frac{1}{D_N} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_m^T}{\partial \hat{\Phi}_m} (\mathbf{Y}_{m+1} - \mathbf{H}_{m+1}(\hat{\Phi}_m)) \right] \right)^{-1}. \quad (9)$$

Проведем матричное дифференцирование в выражении (9) в предположении, что величина невязки наблюдений и получаемой оценки незначительная:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\Phi}_m} \left[\frac{1}{D_N} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}^T}{\partial \hat{\Phi}_m} (\mathbf{Y}_{m+1} - \mathbf{H}_{m+1}(\hat{\Phi}_m)) \right] &\approx \\ &\approx -\frac{1}{D_N} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}^T}{\partial \hat{\Phi}_m} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}}{\partial \hat{\Phi}_m}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{m+1} = \mathbf{H}_{m+1}(\hat{\Phi}_m). \end{aligned}$$

Подставим результат дифференцирования в выражение для ковариационной матрицы ошибок (9):

$$\mathbf{P}_{m+1} = \left(\mathbf{P}_m^{-1} + \frac{1}{D_N} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}^T}{\partial \hat{\Phi}_m} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}}{\partial \hat{\Phi}_m} \right)^{-1}.$$

В результате применения леммы об обращении матрицы к полученному выражению для $\mathbf{P}_{m+1}$ получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{m+1} &= \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_m \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}^T}{\partial \hat{\Phi}_m} \times \\ &\times \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}}{\partial \hat{\Phi}_m} \mathbf{P}_m \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}^T}{\partial \hat{\Phi}_m} + \mathbf{I}D_N \right)^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m+1}}{\partial \hat{\Phi}_m} \mathbf{P}_m. \end{aligned}$$

Рассмотрим операцию дифференцирования применительно в задаче оценивания фазового распределения на раскрые АР. Производная от оценки сигнала вычисляется отдельно для действительной и мнимой частей этого сигнала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_m}{\partial \hat{\Phi}} &= \left\{ \frac{\partial \hat{H}_{Rm}}{\partial \hat{\Phi}}, \frac{\partial \hat{H}_{Im}}{\partial \hat{\Phi}} \right\} = \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \underline{H}_m(\hat{\Phi})}{\partial \hat{\Phi}} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \underline{H}_m(\hat{\Phi})}{\partial \hat{\Phi}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где производная от комплексного сигнала равна

$$\frac{\partial \underline{H}_m(\hat{\Phi})}{\partial \hat{\Phi}} = \mathbf{A}_{m+1} \times \begin{vmatrix} jX_{01}e^{j\hat{\Phi}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & jX_{02}e^{j\hat{\Phi}_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & jX_{0N}e^{j\hat{\Phi}_N} \end{vmatrix}.$$

В частном случае одноканального приема $N=1$ получаем алгоритм фазовой синхронизации в дискретном времени:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{m+1} &= \hat{\Phi}_m + \frac{P_{m+1}}{D_N} A_m X_0 \times \\ &\times \left[-\sin(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \quad \cos(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \right] \times \begin{vmatrix} Y_{R(m+1)} \\ Y_{I(m+1)} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$P_{m+1} = P_m - P_m^2 A_m^2 X_0^2 \left| -\sin(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \quad \cos(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \right| \times \\ \times \left(\begin{bmatrix} -\sin(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \\ \cos(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \end{bmatrix} P_m A_m^2 X_0^2 \times \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} -\sin(\psi_m + \hat{\Phi}_m) & \cos(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \end{bmatrix} + D_N \mathbf{I}_{2 \times 2} \right)^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} -\sin(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \\ \cos(\psi_m + \hat{\Phi}_m) \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования линейного и квазилинейного алгоритмов. Проведем анализ оценивания АФР линейной эквидистантной АР с помощью рекуррентного алгоритма (4)-(6) методом статистического моделирования. Основное внимание уделяется пространственной структуре измерений, которая существенно влияет на точность оценивания [11]. При моделировании приняты следующие величины:

- расстояние между элементами АР равно $d = 0,5\lambda$, где λ – длина волны;
- начальные условия $\hat{\mathbf{X}}_0$ при моделировании фильтра Калмана выбирались следующим образом: а) равными нулю $\hat{\mathbf{X}}_0 = 0 \times \mathbf{I}$, б) равными точному значению АФР $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}$, в) равными максимально правдоподобной оценке [6-8] по тем же наблюдаемым данным

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_{ML} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_M\}^T, \quad (11)$$

- отношение сигнал-шум $q = D_X / D_N = 100$;
- начальное значение матрицы апостериорных дисперсий равно дисперсионной матрице оцениваемого АФР $\mathbf{P}(0) = \mathbf{R}_X = D_X \mathbf{I}$;
- оценивание методом максимального правдоподобия и алгоритмом рекуррентной фильтрации Калмана проводится по одной и той же выборке наблюдаемых данных;
- угловые положения точек измерения γ_m , $m = 1, \dots, M$, выбираются равномерно в угловом секторе $\Delta\gamma$, расположенном перпендикулярно к плоскости АР.

На рисунке 1, а-в приведены зависимости нормированной дисперсии ошибки оценивания АФР

$$D_1 = \frac{1}{ND_X N_{st}} \sum_{i=1}^{N_{st}} (\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{X}}_i)^H (\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{X}}_i),$$

от величины углового сектора измерений $\Delta\gamma$, рассчитанной для рекуррентного алгоритма фильтрации Калмана (4)-(6), алгоритма максимального правдоподобия (11), а также границы Рао-Крамера для оценки АФР $\mathbf{R}_{RK} = D_N (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$ при различных начальных значениях а-в оцениваемого вектора АФР, $M = N = 20$. Усреднение дисперсии ошибки проводится по всем элемен-

там АР, а также по ансамблю независимых выборок, число которых N_{st} выбирается из условия получения требуемого доверительного интервала.

Из сравнения зависимостей, представленных на рисунке 1, можно заключить, что рекуррентный алгоритм фильтрации Калмана дает меньшую погрешность оценивания АФР при величине сектора измерений, отличной от оптимального значения. При оптимальной величине $\Delta\gamma \approx 120^\circ$ эффективность обоих методов оценивания примерно одинакова. Результаты анализа позволяют рекомендовать алгоритм фильтрации Калмана для измерений АФР при достаточно малом числе элементов АР как более эффективный по сравнению с алгоритмом максимального правдоподобия, особенно при неточно заданной пространственной структуре.

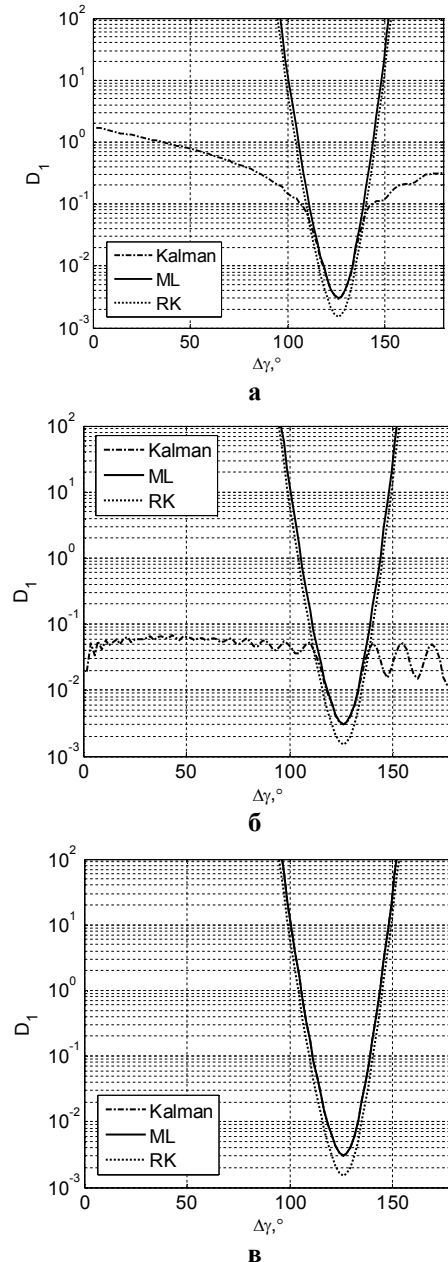


Рисунок 1

Начальные условия рекуррентного алгоритма фильтрации Калмана существенно влияют на точность оценивания при неоптимальном угловом секторе измерений. Сравнивая зависимости, представленные на рисунке 1, можно заключить, что выбор начального условия $\hat{\mathbf{X}}_0 = 0 \times \mathbf{I}$ позволяет получить относительную погрешность оценивания АФР менее 0,01 при оптимальных угловых секторах измерений и не требует априорных сведений о статистике оцениваемых величин.

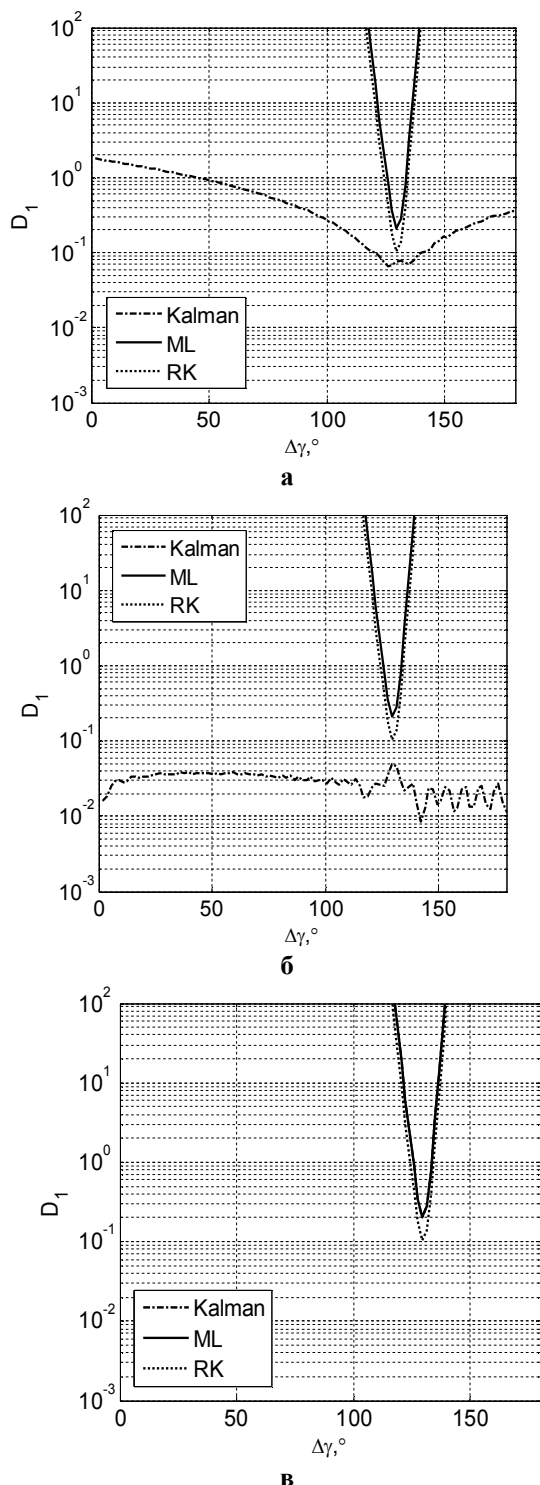


Рисунок 2

При увеличении числа элементов АР N преимущество фильтра Калмана становится более заметным. На рисунке 2 приведены зависимости нормированной дисперсии ошибки оценивания при числе элементов АР $M = N = 40$. При большем числе элементов АР выигрыш в дисперсии ошибки оценивания алгоритма фильтрации Калмана по сравнению с оценкой максимального правдоподобия составляет около 4 раз при оптимальном угловом секторе измерения. Сравнивая результаты моделирования на рисунках 1, 2, можно заключить, что выигрыш в точности оценивания АФР от использования оптимальной пространственной структуры измерения увеличивается при увеличении числа элементов АР. В «идеальном» случае, когда начальные условия фильтра Калмана равны точному значению АФР $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}$, дисперсия ошибки оценивания также уменьшается в несколько раз.

Для приближения начальных условий рекуррентного алгоритма $\hat{\mathbf{X}}_0$ к истинному значению параметров предлагается использовать оценку максимального правдоподобия (11), которая имеет асимптотически гауссовское распределение с математическим ожиданием, равным точному значению АФР $\mathbf{M}\{\hat{\mathbf{X}}_{ML}\} \approx \mathbf{X}$, и дисперсией, определяемой границей Рао-Крамера $\mathbf{R}_{RK}$. Алгоритм оценивания при введенных выше априорных вероятностных характеристиках имеет вид, аналогичный (4)-(6), с начальными значениями оцениваемого вектора АФР $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_{ML}$ и матрицы апостериорных дисперсий $\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_{RK}$, которые выбираются на основе результатов предварительного оценивания. Моделирование рекуррентного алгоритма (4)-(6) показало (рисунок 1, в), что в этом случае получаемая рекуррентная оценка не лучше, чем оценка максимального правдоподобия.

При статистическом моделировании алгоритма оценивания фазы с помощью квазилинейного алгоритма фильтрации Калмана (7)-(9) приняты следующие величины:

- отношение сигнал-шум $q = X_0^2 / D_N$,
- априорная дисперсия оцениваемого фазового распределения $\mathbf{P}(0) = D_\Phi \mathbf{I} = \frac{\pi^2}{3} \mathbf{I}$.

На рисунках 3, а-в и 4, а-в приведены зависимости среднеквадратической ошибки оценивания фазы от величины углового сектора измерений $\Delta\gamma$

$$\sigma_\Phi^\circ = \frac{180}{\pi} \sqrt{\frac{1}{N_{st}} \sum_{i=1}^{N_{st}} (\Phi_i - \hat{\Phi}_i)^\Gamma (\Phi_i - \hat{\Phi}_i)},$$

рассчитанной для алгоритма квазилинейной фильтрации и для максимально правдоподобной оценки фазового распределения для квазилинейного и максимально правдоподобного оценивания при $M = N = 20$ (рисунок 3) и $M = N = 40$ (рисунок 4).

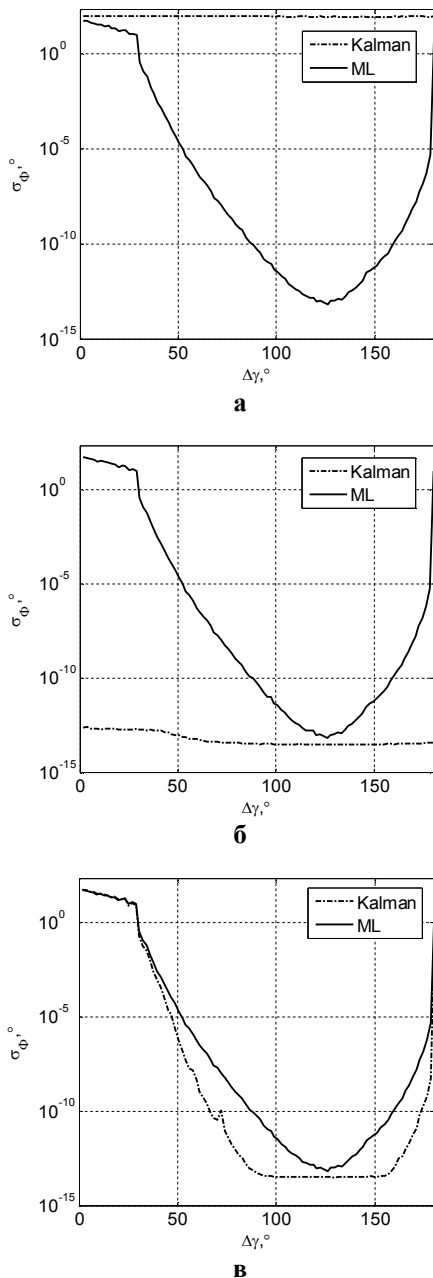


Рисунок 3

Сравнивая полученные результаты (рисунки 3-4), можно заключить, что во всех рассмотренных случаях оптимальное значение сектора измерений фазового распределения равно $\Delta\gamma = 120^\circ \dots 130^\circ$. Исключением является случай а, когда неточно заданные начальные значения оценки фазового распределения не позволяет реализовать преимущества рекуррентного квазилинейного алгоритма (7)-(9). Если начальное

значение равно точному значению ФР или его максимально правдоподобной оценке, то квазилинейный алгоритм позволяет получить в 10..20 раз меньшее значение дисперсии ошибки измерения ФР по сравнению с линейными оценками. При этом влияние пространственной структуры измерений на точность измерения существенно ослабевает. При увеличении числа элементов АР преимущества квазилинейного алгоритма становятся более заметными.

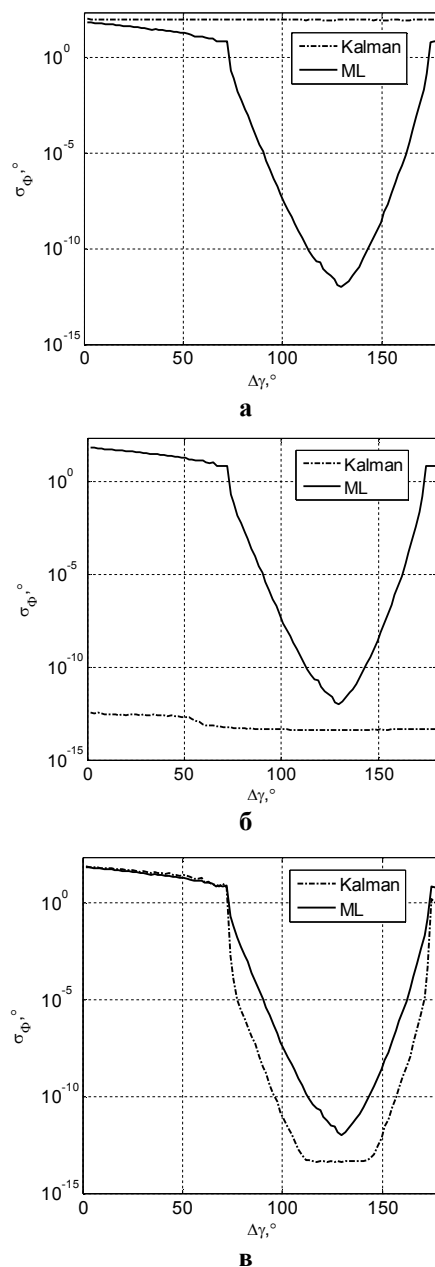


Рисунок 4

Заключение. Проведенные синтез и анализ линейного и квазилинейного алгоритмов оценивания АФР на раскрые АР показали возможность повышения точности оценивания путем рекуррентного выполнения операций оценивания. Применение оптимальной пространственной

ной структуры измерений существенно уменьшает ошибку оценивания. Квазилинейный рекуррентный алгоритм оценивания имеет в 10..20 раз меньшую погрешность оценивания фазы, а также менее критичен к пространственной структуре измерений, но требует более точного определения начальных значений оцениваемого ФР.

Работа выполнена в рамках государственно-го задания Минобрнауки РФ № 2014/178.

Библиографический список

1. Бубнов Г.Г., Никулин С.М., Серяков Ю.Н., Фурсов С.А. Коммутационный метод измерения характеристик ФАР – М.: Радио и связь, 1988. – 120 с.
2. Воронин Е.Н., Горина М.М. Возможности метода реконструктивной диагностики ФАР // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1992. Т.35. С. 11-20.
3. Курочкин А.П. Антенные измерения // Антенны. 1997. Вып. 1(38). С. 5-24.
4. Курочкин А.П. Теория и техника антенных измерений // Антенны. 2009. Вып. 7 (146). С. 39-44.
5. Криштопов А.В., Щербakov А.В. Алгоритм коррекции амплитудно-фазового распределения системы антенна – обтекатель для обеспечения заданных характеристик направленности ФАР (АФАР) перспективных авиационных и космических РЛС // II Всероссийские Арmandовские чтения [Электронный ресурс]: Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред / Материалы V Всероссийской научной конференции (Муром, 26-28 июня 2012 г.), Муром: Изд.-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2012. С. 301-306.
6. Паришин Ю.Н., Гусев С.И., Ксендзов А.В., Колесников С.В., Жариков П.В. Реконфигурирование и адаптация пространственных структур информационных систем // Радиотехника. 2012. №3. С. 36-46.
7. Фролов И.И. Оценивание амплитудно-фазового распределения при непрерывном сканировании антенной решетки // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 4-2. (46) С.109-111.
8. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с.
9. Ярлыков М.С. Марковская теория оценивания случайных процессов / М.С. Ярлыков, М.А. Миронов. – М.: Радио и связь, 1993. – 464 с.
10. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / пер. с англ. под ред. проф. Б.Р. Левина – М.: Связь, 1976. – 496 с.
11. Брагин А.В. Повышение точности оценивания при решении обратной задачи измерения амплитудно-фазового распределения // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2006. № 18. С. 71-73.

УДК 621.391.82

В.Г. Андреев, Н.И. Кононенко, В.С. Белокуров

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРЯДКА МОДЕЛИРУЮЩЕГО АВТОРЕГРЕССИОННОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ПОДАВЛЕНИЯ ПОМЕХ

Предложен метод оптимизации порядка моделирующего авторегрессионного фильтра, основанный на минимизации среднеквадратического отклонения между аналитическим и модельным спектрами на выходе исследуемой системы подавления помех. Эксперименты показали, что по критерию среднеквадратического отклонения между аналитическим и модельным спектрами на выходе исследуемой системы подавления помех предложенный метод обеспечивает выигрыш в 10...15 раз по сравнению с известным подходом к оптимизации порядка модели, основанным на минимизации среднеквадратического отклонения между аналитическим и модельным спектрами на входе исследуемой системы.

Ключевые слова: авторегрессионная модель, линейная авторегрессия, спектр, моделирование временных рядов, система уравнений Юла – Волкера.

Введение. При решении задач обнаружения радиотехнических сигналов на фоне помех методы подавления их мешающих спектральных компонент часто связаны с синтезом различного рода фильтров, таких как режекторный, выбели-

вающий фильтры, череспериодные компенсаторы (ЧПК) [1]. Для синтеза радиотехнических систем требуется оценить эффективность их функционирования. На практике часто производится её оценка методом имитационного моде-

лирования, которое предполагает построение моделирующих фильтров. При наличии характерных для целого ряда радиотехнических задач узкополосных по спектру помех удобно использовать их авторегрессионные (АР) фильтры [2]. Применение авторегрессионного подхода обусловлено возможностью получения более точного описания спектральных плотностей мощности (СПМ) узкополосных помех, чем при использовании фильтров тех же порядков, но с конечной импульсной характеристикой [3, 4].

Параметры АР-фильтров находятся из решения системы линейных уравнений Юла – Уолкера [2], основанной на обращении корреляционной матрицы $\mathbf{R}=[R_{j,k}]$ моделируемого процесса. При этом дающие его компактное описание низкие порядки p моделей не позволяют достаточно полно учесть влияние старших коэффициентов $R_{j,k}$ корреляции с индексами $|j-k| > p$, что снижает адекватность моделирования [5], а завышение порядков p приводит к излишним вычислительным затратам на моделирование.

Цель работы – определение оптимальных значений порядка авторегрессионной модели узкополосных помех, обеспечивающей адекватную оценку функционирования фильтров их подавления по критерию среднеквадратической близости аналитического и модельного спектров на выходе системы обработки сигналов.

Постановка задачи. В качестве аналитического описания статистических свойств гауссовского случайного мешающего процесса была выбрана автокорреляционная матрица $\mathbf{R}$ размерностью $(N \times N)$, характеризующая статистические свойства стационарных мешающих воздействий при гауссовской аппроксимации огибающей их энергетического спектра [1]:

$$R_{j,k} = \exp\left(\frac{-[\pi(j-k)\Delta FT]^2}{2,8}\right), \quad (1)$$

где ΔFT — относительная ширина спектра помехи.

На главную диагональ автокорреляционной матрицы $\mathbf{R}$ для её регуляризации добавлена компонента $P_n=10^{-6}$, соответствующая мощности некоррелированного белого шума с нулевым средним, которая модифицирует диагональные элементы $R_{j,j}$ матрицы $\mathbf{R}$:

$$R_{j,j}=1+P_n. \quad (2)$$

Аналитический спектр $\mathbf{c}=[C_l]$, $l=0, 1, \dots, L-1$ на входе исследуемого фильтра подавления помех определяется следующим образом [2]:

$$C_l = \left| \sum_{j=0}^{N-1} R_{j,0} \exp(-i 2\pi j l / L) \right|^2, \quad (3)$$

где: $R_{j,0}$ — коэффициенты автокорреляционной последовательности (дискретной автокорреляционной функции), составляющие крайний левый вектор-столбец матрицы $\mathbf{R}$; l/L — относительная частота; L, N — число спектральных отсчетов и коэффициентов $R_{j,0}$ автокорреляции помехи соответственно, рассчитываемых по выражениям (1), (2). В дальнейшем принято количество спектральных отсчетов $L=512$, число N коэффициентов автокорреляции при построении спектра $\mathbf{c}$ по (3) составляло величину $N=100$.

Коэффициенты импульсной характеристики режекторного фильтра находятся, как собственный вектор, связанный с минимальным собственным значением матрицы $\mathbf{R}$. Собственные значения матрицы $\mathbf{R}$ определяются из решения характеристического уравнения:

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{R}$ — квадратная $(Q+1) \times (Q+1)$ -мерная автокорреляционная матрица гауссовского случайного процесса; λ — собственные значения матрицы $\mathbf{R}$; $\mathbf{I}$ — $(Q+1) \times (Q+1)$ -мерная единичная матрица; $\det(\bullet)$ — детерминант матрицы.

В статье приняты часто применяемые на практике небольшие ($Q < 7$) порядки фильтров подавления помех [1]. Результатом решения уравнения (4) является спектр собственных значений, а согласованный с минимальным из них вектор $\mathbf{w}=[w_0, w_2, \dots, w_Q]^T$ — импульсной характеристикой режекторного фильтра [1], T — знак транспонирования.

Коэффициенты вектора импульсной характеристики выбеливающего фильтра находятся как элементы крайнего левого вектора-столбца матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ [2]:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{i}, \quad (5)$$

где $\mathbf{i}$ — $(Q+1)$ -мерный крайний левый вектор-столбец единичной матрицы $\mathbf{I}$.

Коэффициенты импульсной характеристики $\mathbf{w}$ для ЧПК сводятся к биномиальному ряду [1].

Тогда, определив одним из перечисленных выше способов коэффициенты w_k импульсной характеристики исследуемой системы подавления помех, можно рассчитать аналитически автокорреляционную матрицу $\hat{\mathbf{R}}$ процесса на выходе фильтра подавления по формуле:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{B}^T \mathbf{R} \mathbf{B}, \quad (6)$$

где $\tilde{\mathbf{R}}=[\tilde{R}_{j,k}]$ — $(N \times N)$ -мерная автокорреляционная матрица выходного процесса системы подавления помех; * — знак комплексного сопряжения, $\mathbf{B}$ — $N \times (N-Q-1)$ -мерная матрица, имеющая следующую структуру:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ w_1 & w_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & w_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_Q & \vdots & \ddots & w_0 & 0 \\ 0 & w_Q & \vdots & w_1 & w_0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & w_Q & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w_Q \end{pmatrix}.$$

Аналитический спектр $\mathbf{s}=[S_l]$ на выходе исследуемого фильтра определяется аналогичным (3) образом:

$$S_l = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{R}_{j,0} \exp(-i 2\pi j l / L) \right|^2, \quad (7)$$

где $\tilde{R}_{j,0}$ — коэффициенты автокорреляционной последовательности (дискретной автокорреляционной функции), сводящиеся к крайнему левому вектору-столбцу матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$ [2].

Структура моделирующего АР-фильтра показана на рисунке 1.

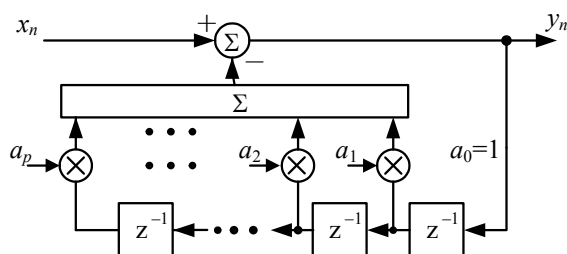


Рисунок 1 — Структура АР-фильтра

На рисунке 1 использованы обозначения величин, входящих в уравнение линейной авторегрессии [2]:

$$y_n = x_n - \mathbf{a}^T \mathbf{y}_n, \quad (8)$$

где: $\mathbf{a}=[a_j]$ — p -мерный вектор-столбец коэффициентов a_j авторегрессии, $j=1, 2, \dots, p$; $\mathbf{y}_n$ — p -мерный вектор-столбец $[y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-p}]^T$ отсчетов процесса на выходе моделирующего АР-фильтра, x_n — отсчёты белого гауссовского возбуждающего шума [2] с нулевым средним. Вектор $\mathbf{a}$ находят из нормального уравнения Юла – Уолкера для АР-процесса [2].

Спектр $\tilde{\mathbf{s}}=[\tilde{S}_l]$ на выходе исследуемого фильтра определяется коррелограмным методом [2].

Введем критерий выбора оптимального по-

рядка моделирующего фильтра. Критерий основан на минимизации квадрата длины вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок между векторами отсчетов спектральных плотностей мощности на выходе системы обработки:

$$\mathbf{\epsilon} = \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}, \quad (9)$$

где: $\mathbf{s}$ — L -мерный вектор аналитической оценки СПМ, полученный преобразованием Винера – Хинчина от $N=100$ коэффициентов крайнего левого вектора-столбца корреляционной матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$; $\tilde{\mathbf{s}}$ — L -мерный вектор СПМ на выходе фильтра обработки, полученный с помощью моделирования. Тогда нормированный квадрат длины E вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок можно, с учётом (9), записать следующим образом:

$$E = \mathbf{\epsilon}^T \mathbf{\epsilon} / L = (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})^T (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}) / L. \quad (10)$$

Экспериментальные исследования. На рисунке 2 приведены зависимости нормированного квадрата длины E вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок от порядка p исследуемой модели. Данные результаты получены при $Q=3$, $\Delta FT=0,1$; $L=512$.

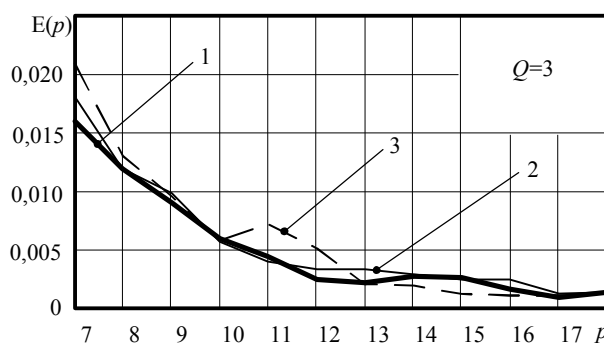


Рисунок 2 — Зависимость СКО от порядка моделирующего фильтра

На рисунке 2 обозначены: сплошной жирной линией 1 — квадрат длины E вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок, полученный для режекторного фильтра; сплошной тонкой линией 2 — для выбеливающего фильтра; пунктирной линией 3 — для ЧПК.

Из анализа рисунка 2 видно, что имеется общая тенденция к стабилизации достигаемого квадрата длины E вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок при наращивании порядка p моделирующего фильтра. Так, при малом порядке $Q=3$ фильтра подавления помех стабильный результат достигается при значении $p=12$, а дальнейшее увеличение порядка моделирующего фильтра не приводит к значительному уменьшению величины E , делая наращивание p нецелесообразным.

Вместе с тем при малых ($p < 7$) порядках моделирующего фильтра происходит резкое (в десятки раз) увеличение квадрата длины E вектора $\mathbf{\epsilon}$ невязок, что свидетельствует о неадекватности

модели. Экспериментально установлено, что приемлемый результат достигается при $p \geq 10$. Отметим, что вычислительные затраты на построение АР-модели возрастают пропорционально p^2 [2], а при порядках $p > 18$ уменьшение E незначительно (менее двух раз). Для выбора оптимального порядка p_{opt} моделирующего фильтра можно ввести пороговое значение ξ , меньше которого снижение квадрата длины E вектора $\mathbf{e}$ невязок нецелесообразно. Величина ξ определяется на основании конкретных условий решаемой задачи. Например, при построении характеристик обнаружения в радиолокационных задачах можно ограничиться, как показали эксперименты, значением $\xi = 0,005$.

Проведем анализ системы обработки при более высоком порядке Q фильтров подавления помех ($Q=6$), а остальные параметры примем неизменными (см. рисунок 3).

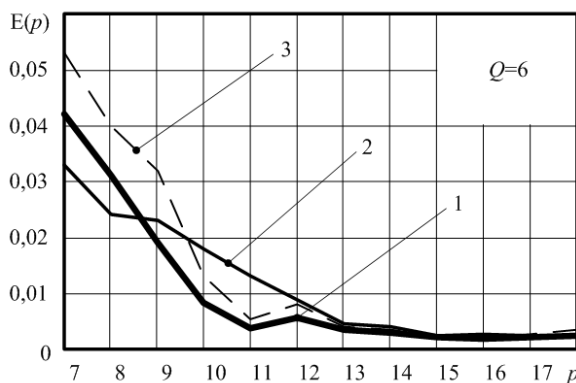


Рисунок 3 — Зависимость СКО от порядка моделирующего фильтра

На рисунке 3 использованы обозначения, аналогичные принятым на рисунке 2.

Из анализа рисунка 3 видно, что при более высоких порядках Q фильтра подавления помех требуются и более высокие оптимальные порядки p_{opt} моделирующих фильтров, которые обеспечивают неравенство $E < \xi$, характеризующее достаточную адекватность модели. Так, при порядке фильтра подавления помех $Q=6$ приемлемый результат достигается при $p_{\text{opt}}=14$, а для $Q=3$ можно ограничиться величиной $p_{\text{opt}}=12$, которая обеспечивает достаточную адекватность модели ($E < 0,005$).

Данные результаты дают возможность выбрать порядки p_{opt} АР-модели такими, чтобы она была адекватна поставленной задаче.

Оценка эффективности. Проведем оценку квадрата длины E вектора $\mathbf{e}$ невязок при изменении относительной ширины ΔFT спектра помехи от узкополосной $\Delta FT=0,05$ до широкополосной $\Delta FT=0,25$. При моделировании примем порядок Q фильтра подавления помех $Q=3$.

Проанализируем зависимость оптимального порядка p_{opt} моделирующего фильтра при изменении относительной ширины спектра помехи ΔFT и пороговом значении $\xi=0,005$ (см. рисунок 4).

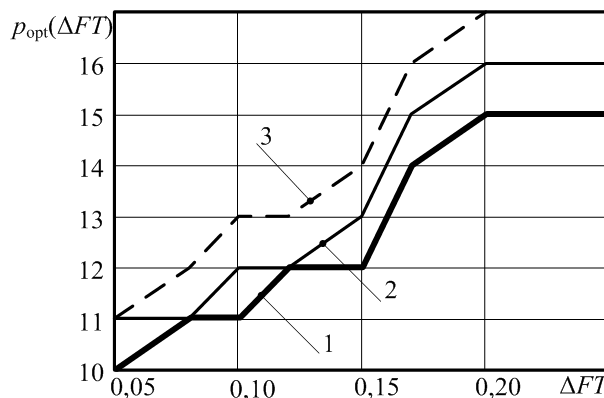


Рисунок 4 — Зависимость оптимального порядка моделирующего фильтра от относительной ширины спектра помехи

На рисунке 4 найденные оптимальные порядки p_{opt} обозначены: сплошной жирной линией 1 — для режекторного фильтра; сплошной тонкой линией 2 — для выбеливающего фильтра; пунктирной линией 3 — для ЧПК.

Из рисунка 4 видно, что при исследовании фильтрации узкополосной помехи ($\Delta FT < 0,15$) можно ограничиться низкими порядками p моделирующих фильтров $p=11...14$. С ростом ширины полосы помехи ($\Delta FT > 0,2$) порядок p моделирующего фильтра целесообразно увеличивать до значений $p=15...17$, что обеспечивает прежнюю, как при узкополосном мешающем процессе, адекватность модели.

В таблице приведены результаты, полученные по ранее известному методу оптимизации p , основанному на сравнении входных спектров $\mathbf{c}$, $\tilde{\mathbf{c}}$, и предлагаемого метода оптимизации, при котором минимизируются отличия спектров $\mathbf{s}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ процессов на выходе системы обработки сигналов. В таблице введены следующие условные обозначения: p_{in} — порядок моделирующего фильтра, найденный по известной методике; $E_{\text{in}}(p)$ — величина квадрата длины вектора невязки между спектрами $\mathbf{c}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ входных процессов для заданной величины порядка p АР-фильтра; $E_{\text{out}}(p)$ — аналогичная величина при сравнении спектров $\mathbf{s}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ выходных процессов; ΔE — выигрыш, определяемый как:

$$\Delta E = E_{\text{out}}(p_{\text{in}}) / E_{\text{out}}(p_{\text{opt}}). \quad (11)$$

Анализ таблицы показывает, что при широкополосной помехе ($\Delta FT \geq 0,2$) порядок p_{opt} моделирующего фильтра, обеспечивающий адекватную оценку $E_{\text{out}}(p_{\text{opt}}) < \xi$, составляет $p=16$. Отме-

тим, что повышение порядков p до десятков ($p > 20$) не приводит к существенному уменьшению достигнутой при оптимальном значении p_{opt} ошибки E_{out} , но при этом резко возрастают вычислительные затраты на моделирование [2].

Таблица

ΔFT	0,1	0,15	0,2
p_{in}	10	12	13
p_{opt}	13	14	16
$E_{\text{in}}(p)$	$2,74 \cdot 10^{-3}$	$2,81 \cdot 10^{-3}$	$4,51 \cdot 10^{-3}$
$E_{\text{out}}(p)$	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{-3}$	$3,77 \cdot 10^{-3}$
$E_{\text{out}}(p_{\text{in}})$	0,02	0,032	0,055
ΔE	10,8	13,2	14,5

Выводы. Таким образом, получены рекомендации по выбору минимально достаточных порядков p_{opt} моделирующих помехи АР-фильтров, что даёт возможность оптимизировать вычислительные затраты на имитацию помеховой обстановки. Было выявлено, что при широкополосной помехе ($\Delta FT \geq 0,2$) порядок p_{opt} моделирующего фильтра, обеспечивающий адекватную оценку $E_{\text{out}}(p_{\text{opt}}) < \xi$, составляет $p=16$. Предлагаемый метод оптимизации обеспечивает

выигрыш в 10...15 раз по критерию (10) по сравнению с известным подходом к оптимизации порядков моделей, основанным на минимизации среднеквадратического отклонения между аналитическим и модельным спектрами на входе исследуемой системы.

Библиографический список

1. Бакулев П.А., Степин В.М. Методы и устройства селекции движущихся целей.— М.: Радио и связь, 1986.— 286 с.
2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ.— М.: Мир, 1990.— 584 с.
3. Кошелев В.И., Андреев В.Г. Синтез АРСС—моделей эхо-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1993.— Т.36.— № 7.— С. 8-13.
4. Бакулев П.А., Кошелев В.И., Андреев В.Г. Оптимизация АРСС—моделирования эхо-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1994.— Т.37.— № 9.— С. 3-8.
5. Андреев В.Г. Векторный регрессионный спектральный анализ отражений от вращающегося объекта // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2010. № 32. С. 43-48.

УДК 621.391

С.Н. Кириллов, Д.И. Лукьянов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЧЕЛОВЕКА НА ПАРАМЕТРЫ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА

Рассмотрено влияние степени эмоционального состояния человека на параметры речевого сигнала в различных частотных полосах. Определена общая значимая полоса речевых частот для различных эмоциональных состояний человека, равная 0,3 - 6,5 кГц. Исследовано влияние полосовой мел-фильтрации на уровень эмоционального содержания речи, показано, что наибольшее влияние оказывают полосы, соответствующие 2,3 и 4 мел-фильтрам. Проведено исследование изменения во времени характеристик речевого сигнала при различных эмоциональных состояниях человека. Показано, что диапазон изменения значений фонетической функции для всех рассматриваемых эмоциональных состояний составляет от 1,5 до 4.

Ключевые слова: психоэмоциональное состояние человека, мел-фильтрация, полоса речевого сигнала, динамика характеристики речевого сигнала, фонетическая функция речевого сигнала.

Введение. Одним из каналов телекоммуникаций является речевое сообщение (РС), которое несет в себе большой объем данных. При этом помимо прямого сообщения, голос человека способен передать и косвенную информацию, которая раскрывает детали и контекст основного содержания [1]. Если при непосредственном

контакте такую информацию человек также способен получить посредством невербального общения, читая мимику и жесты, то в случае удаленного общения, например по телефону, визуальный канал недоступен, а речь подвержена искажениям со стороны канала передачи данных.

В этой ситуации важно уметь распознать косвенную информацию, содержащуюся в речи, благодаря которой можно оценить психоэмоциональное состояние человека (ПЭС), так как на основе его можно сделать выводы о правдоподобности полученной информации или о влиянии на человека наркотических или иных средств. На сегодняшний день существует два основных способа получения оценки ПЭС: посредством кожно-гальванической реакции и кардиограммы [2] и путем оценки параметров РС. В работе рассматривается второй способ получения информации об эмоциях человека, так как он позволяет оценить ПЭС в ситуациях, где невозможно подключение датчиков, а также непосредственный контакт.

Наибольший вклад в развитие данной тематики внесли зарубежные ученые, такие как Шерер, Экман, Уилтинг, Крамер, Видраску, Ли и др. [3-6]. На сегодняшний день решены вопросы классификации эмоций на основании путей их порождения: естественные, искусственные и спровоцированные [3]. При этом спровоцированные эмоции являются промежуточным вариантом, который сочетает в себе естественное проявление и возможность контроля ПЭС. Проведены исследования различий в восприятии актерских и естественных эмоций [4], которые доказали возможность исследования тех и других с учетом поставленных целей. Несмотря на это, реальные эмоции на сегодняшний день мало исследованы и требуют дополнительного изучения [5]. Также до сих пор не решен вопрос о возможности распознавания ПЭС человека посредством компьютерного анализа [6].

Основной проблемой в работе с распознаванием ПЭС человека является сложность создания качественного массива эмоциональных речевых сообщений, записанных в естественных условиях, которые позволяют точно передать состояние человека. При этом существующие базы массивов, открытые в свободном доступе, записаны с помощью актеров, имитирующих те или иные ПЭС человека. Такой подход позволяет оценить изменение речи в различных состояниях, но характеризуется неточностью передачи актером эмоций, что порождает возникновение ложных гипотез. Кроме того, существующие базы записаны на языках, отличных от русского, что также накладывает ограничения, связанные с особенностью языка, а также национальностью дикторов.

Цель работы – исследование влияния ПЭС человека на параметры РС и аппаратной оценки различных эмоций посредством анализа параметров РС на выходе канала передачи данных.

Теоретическая часть. Определение ПЭС человека осложняется тем, что на сегодняшний день не существует единого стандарта описания и оценки различных эмоций человека. В связи с этим в работе будет использоваться модель, построенная на основе модели В. Вундта (рисунок 1). Эта модель не имеет четкой градации по эмоциональным состояниям, но при этом является одной из основных моделей, признанных в психологии личности [1]. Такой выбор модели также обусловлен тем, что данная модель не имеет четкой привязки к известным ПЭС человека, а лишь дает векторы-оси эмоциональной плоскости, что затрудняет привязку областей плоскости к той или иной эмоции.

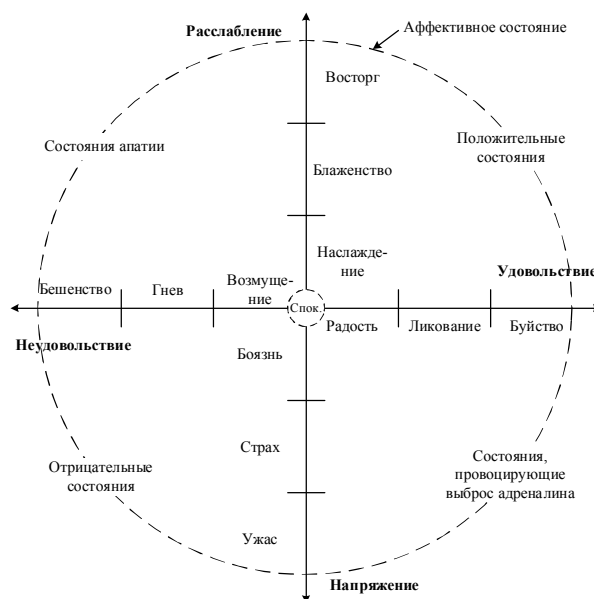


Рисунок 1 – Используемая эмоциональная плоскость

Плоскость, представленная на рисунке 1, позволяет более точно определить точку расположения эмоции на ней, а также показывает возможные пути перехода одного ПЭС человека в другое.

В качестве исследуемых состояний были выбраны следующие: 1 – спокойствие, 2 – радость, 3 – ликование, 4 – возмущение, 5 – гнев, 6 – страх, 7 – боязнь. Выбор этих эмоциональных состояний обусловлен более простой их идентификацией по РС, а также возможностью сравнения нескольких степеней ПЭС по одной шкале.

Исследование связи изменения спектра РС и ПЭС человека. Как известно [7], вид спектра РС определяет основную информацию об источнике сообщения, и изменение состава спектра способно привести к существенным искажениям исходного сообщения.

Для оценки полосы, являющейся определяющей для различных эмоциональных состоя-

ний, был создан массив исходных фраз, содержащих фразы, записанные в рассматриваемых ПЭС человека. Особенностью собранного массива является то, что фразы были записаны на русском языке, который является родным для дикторов. При этом во время записи испытуемые не знали о ходе эксперимента, что сводило к минимуму возможность исказить результаты. Всего в эксперименте участвовало 10 человек (5 мужчин и 5 женщин) в возрасте от 20 до 32 лет, от каждого из которых получено по 5 записей в 2 сессии (всего 10 записей). Все записи производились на широкополосный диктофон Olympus LS-10 с полосой пропускания от 20 Гц до 23 кГц с частотой дискретизации 48 кГц в режиме импульсно-кодовой модуляции (ИКМ) с разрядностью кодового слова – 24 бита.

При оценке граничных верхних и нижних полос для определения значимой частотной полосы эмоционального речевого сигнала (ЭРС) исходные сигналы пропускались через фильтры с различными частотами среза, после чего полученные сигналы прослушивались шестью аудиторами и выставлялась оценка по стобалльной шкале. Ввиду того, что на сегодняшний день не существует единого стандарта по определению ПЭС человека, для оценки за основу был взят ГОСТ Р 50840-95 по оценке качества, разборчивости и узнаваемости РС.

В результате проведенных исследований получены результаты, представленные в таблице 1. Указанные в таблице частоты означают, что при отфильтровывании частот в полосе между нижней и верхней границами распознавание ПЭС становилось затруднительным и возникали ошибки.

Таблица 1 – Граничные частоты для различных эмоциональных состояний

Эмоция	Нижняя граница, Гц	Верхняя граница, кГц
Радость	350	6,5
Возмущение	300	4,5
Боязнь	330	5,5
Страх	350	6,5
Гнев	450	4,5
Ликование	650	3,5

Анализ таблицы 1 показывает, что максимально возможная полоса ЭРС составляет 0,3 - 6,5 кГц, при которой все рассмотренные ПЭС с успехом идентифицируются. При этом видно, что наибольшую полосу требуют сигналы со слабыми эмоциями (эмоциями, близкими к центру эмоциональной плоскости), а с ростом эмоциональности значимая полоса сокращается. Полученный результат говорит о том, что для

эффективной оценки ПЭС по РС, принятым из каналов связи (КС), требуется использовать современные кодеки с полосой пропускания до 8 кГц, такие как ARM-WB, которые на сегодняшний день с успехом используются в IP-телефонии, видеотелефонии, сотовой связи. При использовании более узкополосных кодеков РС, например с полосой 0,3 - 3,4 кГц, возможно распознавание только ярко выраженных эмоций, таких как ликование, гнев и т.п.

Исследована возможность оценки в различных частотных полосах РС степени эмоциональности состояния человека. Для оценки использовалась мел-шкала, преимущество которой заключается в том, что такая шкала наиболее точно совпадает с АЧХ человеческого уха и позволяет приблизиться к механизму человеческого восприятия. Для перевода линейной частотной шкалы в мел-шкалу использовалась следующая формула [8]:

$$B(f) = 1125 \ln(1 + f/700),$$

где f – частота в Гц.

На основании представленной формулы выражение для гребенки мел-фильтров будет выглядеть следующим образом:

$$H_m = \begin{cases} 0, & k < f[m-1], \\ \frac{k - f[m-1]}{f[m] - f[m-1]}, & f[m-1] \leq k < f[m], \\ \frac{f[m+1] - k}{f[m+1] - f[m]}, & f[m] \leq k \leq f[m+1], \\ 0, & k > f[m+1]. \end{cases}$$

При этом частоты $f[m]$ получены по формуле [7]:

$$f[m] = \frac{N}{F_s} \cdot B^{-1} \left(B(f_l) + m \frac{B(f_h) - B(f_l)}{M+1} \right),$$

где F_s – частота дискретизации, M – число фильтров, B^{-1} – обратное мел-преобразование, N – число отсчетов, f_l – нижняя граничная частота, f_h – верхняя граничная частота, m – номер фильтра.

В результате проведенных расчетов получен набор из 12 мел-фильтров в полосе до 8 кГц. Далее все фильтры подвергались инверсии и через них пропускались исходные ЭРС. Обработанные записи прослушивались аудиторами, которые выставляли оценку по стобалльной шкале, с градацией согласно ГОСТ Р 50840-95. По итогам эксперимента получены результаты, представленные в таблице 2. (В связи с тем, что 1, 11 и 12 мел-фильтры лишь частично захватывают полосу 0,3 - 6,5 кГц, то из-за большого массива РС

для анализа результаты для этих фильтров не приводятся).

Таблица 2 – Степень узнаваемости эмоций после фильтрации мел-фильтрами

Номер фильтра	Эмоция					
	Радость	Возмущение	Боязнь	Страх	Гнев	Ликование
2	91	92	90	88	91	94
3	81	82	79	78	80	83
4	90	93	90	89	92	95
5	100	100	100	100	100	100
6	100	100	100	100	100	100
7	100	100	100	100	100	100
8	100	100	100	100	100	100
9	100	100	100	100	100	100
10	100	100	100	100	100	100

Из анализа таблицы 2 видно, что наибольший эффект оказали фильтры с номерами 2, 3 и 4. В то же время эффект от фильтрации оказался не столь существенным, в связи с чем было принято решение расширить фильтруемую полосу частот путем пропускания сигнала через 2 и более соседних фильтра. В результате получены значения узнаваемости эмоций при одновременном использовании 2, 3, 4 и 5 мел-фильтров. Итоговые значения сведены в таблицу 3.

Анализ результатов таблицы 3 показал, что с увеличением полосы фильтрации уменьшается степень узнаваемости эмоций, но при этом, даже в случае пяти фильтров в основной полосе РС по-прежнему сохраняется разборчивость фраз и способность определения эмоционального окраса речи. Такой результат можно объяснить тем, что существенный вклад в восприятие ПЭС человека может вносить изменение параметров РС во времени, а также скорость речи диктора.

Исследование влияния ПЭС человека на основные параметры РС. В ходе эмоционального разговора человек, как правило, использует различные приемы для передачи требуемой информации, такие как изменение интонации, громкости речи, скорости речи и т.п. [1]. При этом такие параметры, как интонация, громкость и скорость речи являются удобными с точки зрения восприятия их человеком, но не являются физическими параметрами РС, что затрудняет их численную оценку. В связи с этим встает вопрос об определении параметров речи, зависящих от ПЭС человека, и изменение которых можно численно определить.

Таблица 3 – Степень узнаваемости эмоций после фильтрации несколькими мел-фильтрами

Номер фильтра	Эмоция					
	Радость	Возмущение	Боязнь	Страх	Гнев	Ликование
2 фильтра						
2,3	82	86	82	80	85	87
3,4	78	79	77	76	79	84
4,5	83	85	82	82	86	94
5,6	89	91	89	88	90	100
6,7	94	98	94	93	97	100
7,8	100	100	100	100	100	100
8,9	100	100	100	100	100	100
9,10	100	100	100	100	100	100
3 фильтра						
2-4	75	78	74	75	81	83
3-5	70	77	72	73	79	81
4-6	75	81	76	79	84	86
5-7	80	87	84	85	89	93
6-8	90	94	91	91	95	100
7-9	100	100	100	100	100	100
8-10	100	100	100	100	100	100
4 фильтра						
2-5	68	74	69	70	75	79
3-6	75	78	75	76	79	83
4-7	80	83	81	81	83	88
5-8	87	90	87	88	91	94
6-9	95	97	94	94	97	100
7-10	100	100	100	100	100	100
5 фильтров						
2-6	60	63	59	59	62	65
3-7	68	68	67	67	69	72
4-8	73	78	73	74	78	79
5-9	82	85	82	81	84	86
6-10	93	95	94	94	95	100

В качестве исследуемых параметров были выбраны следующие: интенсивность речи (дБ), длительность фразы, частота основного тона (ЧОТ), первые три форманты, джиттер (нежелательные фазовые случайные отклонения передаваемого сигнала) и шиммер (нежелательные амплитудные случайные отклонения передаваемого сигнала), которые были выбраны, основываясь на ранее полученных результатах [9]. Средняя длительность фраз в исследуемом массиве составляла 3,5 с, что соответствует примерно одному предложению при средней скорости речи. Все параметры рассчитывались для кадров размером в 25 мс, после чего полученные массивы для каждой из фраз нормировались по числу значений для более удобного анализа. При этом предварительно исследовалось изменение дли-

тельности одной и той же фразы при различных эмоциональных состояниях, что косвенно позволило определить изменение скорости речи говорящего. Так, для эмоции радости среднее увеличение длины озвученного участка речи составило 7,79 %, для ликования – 39,78 %, для боязни – 19,28 %, для страха – 31,44 %, для гнева – 41,38 %, при этом для эмоции возмущения характерным являлось сокращение длительности озвученного участка речи в среднем на 9,71 %.

Проведен анализ изменения ЧОТ в зависимости от ПЭС человека. Анализ проводился посредством комбинированной функции [10,11], где F_0 – ЧОТ, k – номер кадра, $a = 0 \dots 1$:

$$\bar{Z}(k, a) = \ln \left(\frac{F_0(k)}{[F_0(k-1)]^a} \right), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Комбинированная функция позволяет оценить вклад статических и динамических характеристик в результирующий показатель. При этом их соотношение зависит от коэффициента a , так, при $a = 0$ на результат оказывает влияние только статическая характеристика, а при $a = 1$ – только динамическая.

С ростом весового коэффициента увеличивается влияние динамической характеристики на результирующее значение комбинированной функции.

Для оценки отклонения ЧОТ при различных ПЭС от спокойного состояния использовалось расстояние Евклида:

$$d = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2}. \quad (1)$$

В результате получены зависимости, представленные на рисунке 2, показывающие изменение расстояния ЧОТ (1) в случае разных эмоций человека и в спокойном состоянии при длине кадра, равной 24 мс.

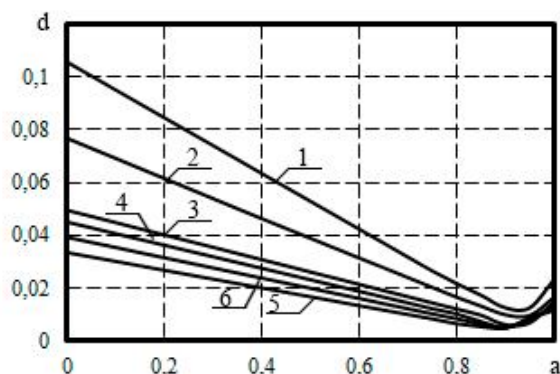


Рисунок 2 – Изменение расстояния ЧОТ одной фразы для различных ПЭС человека

Здесь 1 – для эмоции ликования, 2 – для эмоции радости, 3 – для эмоции возмущения, 4 – для эмоции страха, 5 – для эмоции боязни, 6 – для эмоции гнева.

Анализ зависимостей, изображенных на рисунке 2, показывает, что с ростом значения коэффициента a расстояние d практически на всем участке линейно уменьшается, при этом только при значениях $a > 0,9$ наблюдается небольшой подъем для всех ПЭС человека. Полученные зависимости говорят о том, что наибольшему изменению подвержены статические характеристики ЧОТ.

Анализ частотных формант показал, что в течение фразы значения частот резко меняются, при этом ни для одной эмоции не выявлено ярко выраженных характерных признаков. Значения медианы для первой и второй формант в случае эмоций радости и гнева являются меньшими по сравнению со спокойным состоянием и составляют 911 Гц и 2492 Гц для радости и 915 Гц и 2508 Гц для гнева (938 Гц и 2611 Гц в спокойном состоянии соответственно).

На рисунке 3 представлены верхние огибающие интенсивности РС при различных ПЭС человека, где 1 – для состояния спокойствия, 2 – для эмоции радости, 3 – для эмоции ликования, 4 – для эмоции возмущения, 5 – для эмоции гнева, 6 – для эмоции страха, 7 – для эмоции боязни.

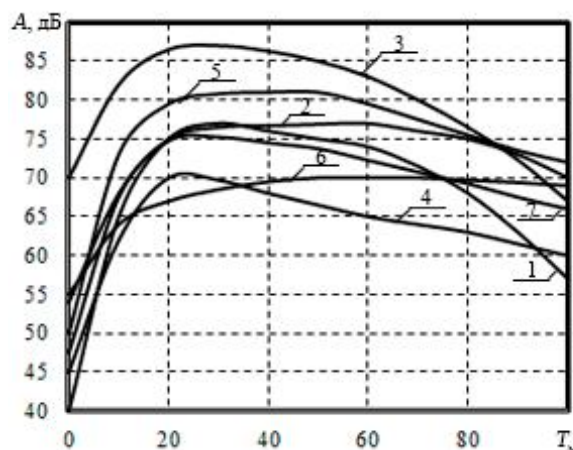


Рисунок 3 – Верхняя огибающая интенсивности РС для различных ПЭС

Анализ зависимостей, изображенных на рисунке 3, показывает, что при эмоциях радости, ликования и гнева увеличивается уровень интенсивности РС, что сопоставимо с увеличением громкости голоса диктора. Интенсивность РС при эмоции радости в среднем увеличивается на 4 дБ, при эмоции ликования – на 10 дБ, при эмоции гнева на 6 дБ. В случае возмущения и страха интенсивность РС уменьшается в среднем на 7 дБ и 3 дБ соответственно. При этом при эмоции страха происходит существенный рост интенсивности РС в конце фразы, что можно объяснить нарастанием напряжения в голосе диктора.

При анализе амплитудного и частотного дрожания установлено, что при эмоции ликова-

ния частотное дрожание снижалась на 1,06 %, для эмоций возмущения, страха и гнева амплитудное дрожание увеличивалась на 5,62 %, 2,86 % и 3,00 % соответственно при среднем отклонении, равном 0,08 %. В остальных случаях изменение дрожания не выходило за пределы разброса значений для различных реализаций.

Исследование динамики спектра РС. Для анализа динамики спектра РС использовался алгоритм, построенный на основе мел-фильтров и фонетической функции Пирогова [12], с помощью которого оценивалась динамика мел-спектральных и мел-кепстральных коэффициентов. Для анализа мел-спектральных коэффициентов исходные РС пропускались через гребенку мел-фильтров, после чего вычислялась энергия сигналов, полученных после фильтрации. Далее вычислялось значение модифицированной функции А.А. Пирогова [12]:

$$P(m, t) = \lg \frac{M_s(m, t)}{M_s(m, t + \tau)},$$

где M_s – вектор энергии фильтрованного РС, вычисленный в моменты времени t и $t + \tau$, $\tau = 20$ мс.

Далее полученные значения усреднялись для всего массива РС, в результате чего были получены зависимости, представленные на рисунке 4.

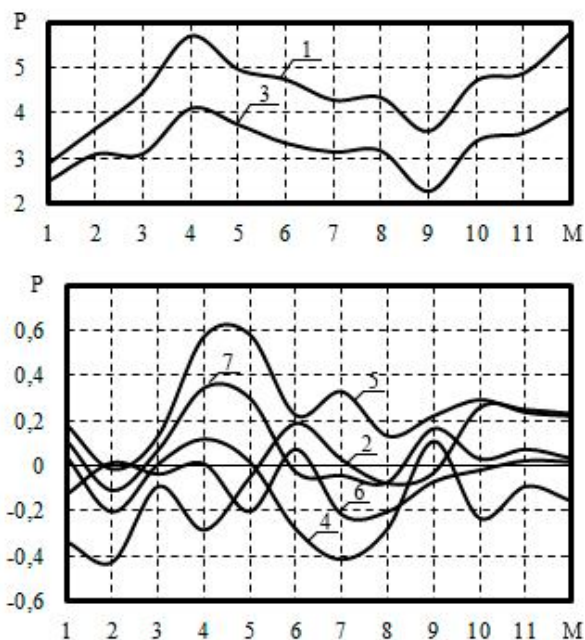


Рисунок 4 – Зависимости значений фонетической функции от номера мел-фильтра

Анализ зависимостей, изображенных на рисунке 4, показывает, что значения фонетической функции резко отличаются для спокойного состояния и эмоции ликования – от всех остальных эмоциональных состояний. При этом для эмоции ликования график зависимости практически в

точности повторяет график для спокойного состояния и отличается в среднем на 1,5. При эмоции гнева график зависимости располагается близко к нулю, но при этом имеет положительные значения. Для всех остальных эмоций зависимости имеют значения, колеблющиеся около нуля, и слабо отличаются друг от друга.

При анализе динамики мел-кепстральных коэффициентов также использовалась функция Пирогова, при этом оценивалось суммарное изменение каждого коэффициента и нормировалось к числу кадров по 20 мс. Средняя девиация значений в пределах одного ПЭС составила 0,045. В результате проведенных исследований получены значения, представленные в таблице 4. Пустые значения в таблице 4 соответствуют случаю, когда изменение динамики мел-кепстральных коэффициентов не выходит за пределы средней девиации.

Таблица 4 – Динамика мел-кепстральных коэффициентов

Коэффициент	Эмоция					
	Возмущение	Боязнь	Страх	Гнев	Ликование	Радость
1	-	-	-0,11	-	-	-
2	-	-0,07	-0,11	-	-0,05	-
4	-	-	-	-0,07	-0,19	-0,06
5	-0,12	-0,11	-0,18	-0,05	-0,07	-0,09
6	-	-0,09	-0,14	0,05	0,07	-
7	-0,11	-0,08	-0,15	-0,07	-0,06	-0,13
8	-0,08	-0,12	-0,17	-0,11	-0,16	-0,2
9	-	-0,07	-0,12	0,05	-0,13	-
10	-0,14	-0,15	-0,24	-	-0,08	-0,06
11	-0,07	-0,1	-0,18	-0,13	-0,2	-0,06
12	-0,09	-0,08	-0,15	-0,07	-0,17	-

Анализ таблицы 4 показывает, что практически все мел-кепстральные коэффициенты существенно изменяются при различных ПЭС человека. Исключение составил только третий коэффициент, изменение которого не выходило за пределы девиации.

Выводы. На основе результатов экспериментов, представленных в работе, можно сделать вывод о том, что с целью последующего аппаратного определения ПЭС человека требуется использовать системы передачи сообщений, обеспечивающие полосу РС на выходе не менее 6,5 кГц, что подразумевает использование кодеков с частотой дискретизации не менее 16 кГц. На сегодняшний день наиболее эффективным кодеком с такими параметрами передачи является ARM-WB, который успешно используется в IP-телефонии, видеотелефонии и сотовых сетях.

При использовании кодеков, обеспечивающих меньшую полосу РС на выходе системы, возможно распознавание только ярко выраженных эмоций.

При анализе влияния ПЭС на статические и динамические характеристики ЧОТ установлено, что статические характеристики больше подвержены изменению при том или ином ПЭС человека и расстояние больше в 3,5...5 раз для исследуемых ПЭС человека. При этом для сильных эмоций, таких как ликование и гнев, расстояние больше, чем для слабых.

При исследовании изменения параметров РС во времени установлено, что наибольшему изменению от различного ПЭС человека подвергается интенсивность РС. Огибающая интенсивности в среднем увеличивается на 4 дБ для эмоции радости, для эмоции ликования – на 10 дБ, а для эмоции гнева – на 6 дБ. В случае возмущения и страха интенсивность РС уменьшается в среднем на 7 дБ и 3 дБ соответственно.

Кроме того, значительно изменяется длительность фраз, что характеризуется изменением скорости речи человека. Для эмоции радости среднее увеличение длины озвученного участка речи составило 7,79 %, для ликования – 39,78 %, для боязни – 19,28 %, для страха – 31,44 %, для гнева – 41,38 %, при этом для эмоции возмущения характерным являлось сокращение длительности озвученного участка речи в среднем на 9,71 %.

При исследовании динамики спектра РС установлено, что значения фонетической функции при исследовании мел-спектральных коэффициентов для всех ПЭС человека существенно отличаются от спокойного состояния. При этом для эмоции ликования значения фонетической функции для всех мел-фильтров ниже в среднем за 1.5. Для эмоции гнева значения фонетической функции ниже в среднем на 4 и остаются положительными. Для всех остальных рассматриваемых ПЭС человека значения фонетической функции колеблются около нуля и слабо отличаются друг от друга.

При исследовании мел-контрастных коэффициентов установлено, что 1,2,4,5,6,7,8,9,10,11 и 12 коэффициенты существенно меняются при различных ПЭС человека. При этом 5,7,8 и 11 коэффициенты значимы при всех исследуемых эмоциях.

Библиографический список

1. Ильин Е. П. Эмоции и чувства. – СПб: Питер, 2001. – 752 с.
2. Варнавский А.Н. Определение параметров психоэмоциональной напряженности оператора во временной области // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2012. №41. С. 53-59.
3. Scherer Klaus R. Vocal communication of emotion: A review of research paradigms, Speech communication 40 (2003) 227-256, Department of psychology, University of Geneva, Switzerland, 2003.
4. Wilting Janneke, Krahmer Emiel, Swerts Marc, Real vs. acted emotional speech, Communication and Cognition, Interspeech 2006-ICSLP, Tilburg University, The Netherlands, 2006.
5. Vidrascu Laurence, Devillers Laurence, Detection of real-life emotions in call centers, Interspeech 2005, Computer science department, France, 2005.
6. Lee C.M. Narayanan S. Pieraccini R. Recognition of negative emotions from the speech signal, Dept. of electrical engineering and IMSC, University of southern California, Los Angeles, Speechworks international, New York, USA, 2001.
7. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов / под ред. М.В. Назарова и Ю.Н. Прохорова. – М.: Радио и связь, 1981. – 496 с.
8. Xuedong Huang, Alex Acero, Hsiao-Wuen Hon, Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithm, and System Development, Prentice Hall, 2001, p. 980.
9. Лукьянов Д.И. Определение значимых параметров речевого сообщения для выявления психоэмоционального состояния человека по шкале удовольствие–неудовольствие // Восемнадцатая всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях»: Тез. докладов. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2013. – С. 103-104.
10. Кириллов С.Н., Шустиков О.Е., Мамушев Д.Ю. Идентификационная значимость статических и динамических признаков речевого сигнала в системах распознавания дикторов // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2000. № 7. С. 92-96.
11. Шустиков О.Е. Функция распределения оценки обобщенного спектра мощности случайного процесса. // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2001. № 8. С. 14-18.
12. Пирогов А.А. Основы фонетической теории речи. Фонетическая функция как универсальный природный инструмент кодирования (декодирования) речевой информации любого происхождения. ЖРФМ. 2001. № 1-12. С. 15-28.

УДК 621.01.512

С.С. Мамонов, И.В. Ионова**ИССЛЕДОВАНИЕ БИЕНИЙ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ
АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ**

Рассматривается математическая модель поисковой системы фазовой автоподстройки частоты. Получены условия существования гиперболических предельных циклов второго рода. Показано, что использование гиперболически инвариантных множеств и вращения векторного поля для циклов второго рода может привести к увеличению параметра системы на 20%. Рассмотрен пример системы с синусоидальной нелинейностью, имеющей пачечные биения.

Ключевые слова: режимы синхронизации, предельные циклы, фазовая автоподстройка.

Введение. В работе рассматривается поисковая система фазовой автоподстройки частоты (ФАП), описываемая операторным уравнением [1-3]:

$$p\sigma(t) + \Omega_m K(p)F(\sigma(t)) = \Omega_n + f(t), \quad (1)$$

где $p = d/dt$ - оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ - разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_m - максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления, $\Omega_n = const$ - начальная расстройка, $K(p)$ - коэффициент передачи фильтров нижних частот в операторной форме, $F(\sigma)$ - характеристика фазового дискриминатора, $f(t)$ - функция, характеризующая закон поиска. В случае дробно-рационального фильтра $K(p) = B(p)Q^{-1}(p)$, где $B(p)$, $Q(p)$ - многочлены относительно оператора дифференцирования, $Q(p)f(t) \equiv const$, уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений [4]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \rho\varphi(\sigma), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Система (2) рассматривается в случае, когда $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой и Δ -периодической функцией. Особенностью системы (2), соответствующей поисковой системе ФАП, является равенство определителя матрицы $\mathbf{A}$ нулю ($\det \mathbf{A} = 0$).

Рабочими режимами для системы ФАП являются режимы синхронизации. Нахождение синхронных режимов связано с условиями глобальной устойчивости и определением областей

притяжения состояний равновесия. Система вида (2) изучалась в работах [5-13], где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. В последнее десятилетие возрос интерес к асинхронным режимам. Это связано с использованием хаотических колебаний, генерируемых системой ФАП [5-7], с нахождением неустойчивых циклов, определяющих области притяжения состояний равновесия [11], с применением систем ФАП для решения модельных задач нейродинамики [7].

Цель работы - разработать численно-аналитический подход для определения условия существования режимов биения в фазовых системах, найти условия существования гиперболических предельных циклов второго рода, определяющих области притяжения состояний равновесия, показать возможность использования системы ФАП в качестве модели нейроноподобного элемента [7].

Теоретические исследования

Пусть множество Ω ограничено поверхностями $\partial\Omega_i = \{\mathbf{z} : V_i(\mathbf{z}) = 0, \mathbf{z} \in E_i \subset \mathbf{R}^{n+1}\}$, $i = \overline{1, p}$, где $\mathbf{z} = colon(\mathbf{x}, \sigma)$, функции $V_i(\mathbf{z})$ являются дифференцируемыми на множестве E_i . Обозначим через $\dot{V}_i(\mathbf{z})_{\partial\Omega_i}$ производную функции $V_i(\mathbf{z})$ на поверхности $\partial\Omega_i$ в силу системы (2). Пусть для любого $\sigma_0 \in R$ множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\} \neq \emptyset$, Ω_0 - замкнутое и ограниченное, граница множества Ω имеет вид

$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^p \partial\Omega_i$. Обозначим через $\overline{G}$ замыкание множества G .

Определение 1. Если для поверхности $\partial\Omega_i$ замыкание множества $\Omega_i^\pm = \Omega \cap \{z: V_i(z) \geq 0\}$ содержит поверхность $\partial\Omega_i$, $\partial\Omega_i \subset \overline{\Omega_i^\pm}$ и справедливо неравенство $\dot{V}_i(z)_{\partial\Omega_i} \geq 0$, то $\partial\Omega_i$ называется положительно инвариантной поверхностью для множества Ω , $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i^+$.

Определение 2. Если для поверхности $\partial\Omega_i$ замыкание множества $\Omega_i^\pm = \Omega \cap \{z: V_i(z) \geq 0\}$ содержит поверхность $\partial\Omega_i$, $\partial\Omega_i \subset \overline{\Omega_i^\pm}$ и справедливо неравенство $\dot{V}_i(z)_{\partial\Omega_i} \leq 0$, то поверхность $\partial\Omega_i$ называется отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i^-$.

Определение 3. Пусть граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = (\bigcup_{i=1}^k \partial\Omega_i^+) \cup (\bigcup_{j=1}^m \partial\Omega_j^-)$, где $\partial\Omega_j^+$ – положительно инвариантные поверхности для Ω , $\partial\Omega_j^-$ – отрицательно инвариантные поверхности для Ω , $k \geq 1$, $m \geq 1$, для любого $\sigma_0 \in R$ множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{z: \sigma = \sigma_0\}$ является замкнутым и ограниченным, $\Omega_0 \neq \emptyset$, тогда множество Ω называется гиперболически инвариантным.

Теорема 1. Пусть для системы (2) при $n = 2$ выполнены условия:

- 1) $c^T b = -\Gamma < 0$, $\rho \leq 0$, $c^T A = I^T$, $\text{rang}\|c, I\| = 2$, $I^T b = v > 0$, $I^T A = -\alpha_1 I^T$, $\alpha_1 > 0$,
 $\max_{\sigma} \varphi(\sigma) = M_0 > 0$, $\min_{\sigma} \varphi(\sigma) = -m_0 < 0$,
 $q_1 = (\alpha_1 - v\Gamma^{-1}) > 0$;

2) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma) + D\Gamma^{-1}, \quad \dot{\sigma} = y + \rho\Gamma^{-1/2}\varphi(\sigma) \quad (3)$$

при $\mu = \mu_1 > v\Gamma^{-3/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\max_{\sigma} F_1(\sigma) = M_1$, $\min_{\sigma} F_1(\sigma) = m_1$, $D = D_1 < vm_1 \times \Gamma^{-1/2}$;

3) система уравнений (3) при $\mu = 0$, $D = D_{21} > vM_0\alpha_1^{-1}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$, $0 < F_2(\sigma) < F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Тогда система (2) имеет гиперболически инвариантное множество.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(z) = c^T x - \Gamma^{1/2} F_1(\sigma)$, $V_2(z) = I^T x + v\Gamma^{-1} c^T x - D_1$,

$V_3(z) = I^T x + D_3$, $W_1(z) = I^T x - D_2$, $W_2(z) = c^T x - \Gamma^{1/2} F_2(\sigma)$, где $z = \text{colon}(x, \sigma)$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям 2, 3 теоремы 1, для значений D_1 , D_2 , D_3 выполняются неравенства:

$$D_1 < vm_1\Gamma^{-1/2}, \quad (4)$$

$$D_{21} > D_2 > vM_0\alpha_1^{-1}, \quad (5)$$

$$D_3 > \max\{vm_0\alpha_1^{-1}; vM_1\Gamma^{-1/2} - D_1\}. \quad (6)$$

Определим поверхности

$$\partial\Omega_1 = \{z: V_1(z) = 0, V_2(z) \geq 0, W_1(z) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{z: V_2(z) = 0, V_3(z) \geq 0, W_1(z) \geq 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{z: V_3(z) = 0, V_2(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$

$$\partial Q_1 = \{z: W_1(z) = 0, V_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$

$$\partial Q_2 = \{z: W_2(z) = 0, V_3(z) \geq 0, W_1(z) \leq 0\}.$$

В силу условий 1, 3 теоремы 1 и неравенств (5), (6) множества $\partial\Omega_i$, $i = \overline{1, 3}$, ∂Q_j , $j = \overline{1, 2}$, не являются пустыми.

Пусть Ω – множество ограничено поверхностями $\partial\Omega_i$, $i = \overline{1, 3}$, ∂Q_j , $j = \overline{1, 2}$, тогда $\Omega = P_1 \setminus P_2$, где $P_1 = \{z: V_3(z) \geq 0, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}$, $P_2 = \{z: V_1(z) > 0, V_2(z) > 0\}$. Для Ω справедливы соотношения $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial Q_1 \cup \partial Q_2$, $\Omega_0 = \Omega \cap \{z: \sigma = \sigma_0\} \neq \emptyset$, множество Ω_0 является замкнутым и ограниченным.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Если $z \in \partial\Omega_1$, то выполняются соотношения:

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma), \quad (7)$$

$$I^T x + v\Gamma^{-1} c^T x \geq D_1. \quad (8)$$

Используя (7), (8) и условия 1, 2 теоремы 1, найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z)_{\partial\Omega_1} &= I^T \dot{x} - \Gamma \dot{\varphi}(\sigma) - \sqrt{\Gamma} \frac{dF_1(\sigma)}{d\sigma} (c^T \dot{x} + \rho \varphi(\sigma)) \geq \\ &\geq \Gamma F_1(\sigma) (\mu_1 - v\Gamma^{-3/2}) > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом определения 2 поверхность $\partial\Omega_1$ является отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1^-$.

Пусть $z \in \partial\Omega_2$, тогда

$$I^T x = D_1 - v\Gamma^{-1} c^T x. \quad (10)$$

$$c^T x \geq \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \quad (11)$$

В силу (4), (10), (11) и условия 1 теоремы 1 производная функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\mathbf{z})_{\partial\Omega_2} &= -\mathbf{I}^T \mathbf{x}(\alpha_1 - v\Gamma^{-1}) \geq \\ &\geq (\alpha_1 - v\Gamma^{-1})(v\Gamma^{-1/2}m_1 - D_1) > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно определению 2 поверхность $\partial\Omega_2$ является отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_2^-$.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$. Если $\mathbf{z} \in \partial\Omega_3$, то выполняется соотношение

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} = -D_3. \quad (13)$$

Используя (6), (13) и условие 1 теоремы 1, найдем производную функции $V_3(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_3$:

$$\dot{V}_3(\mathbf{z})_{\partial\Omega_3} = v\varphi(\sigma) - \alpha_1 \mathbf{I}^T \mathbf{x} \geq \alpha_1 D_3 - vm_0 > 0. \quad (14)$$

С учетом определения 1 поверхность $\partial\Omega_3$ является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_3 = \partial\Omega_3^+$.

Пусть $\mathbf{z} \in \partial Q_1$, тогда

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} = D_2, \quad (15)$$

в силу (6), (15) и условия 1 теоремы 1 производная функции $W_1(\mathbf{z})$ на множестве ∂Q_1 удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_1(\mathbf{z})_{\partial Q_1} = v\varphi(\sigma) - \alpha_1 \mathbf{I}^T \mathbf{x} \leq vM_0 - \alpha_1 D_2 < 0. \quad (16)$$

С учетом определения 1 поверхность ∂Q_1 является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial Q_1 = \partial Q_1^+$.

Рассмотрим множество ∂Q_2 . Если $\mathbf{z} \in \partial Q_2$, то справедливы соотношения

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma), \quad (17)$$

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} \leq D_2. \quad (18)$$

Используя (5), (17), (18) и условия 1, 3 теоремы 1, находим производную функции $W_2(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве ∂Q_2 :

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(\mathbf{z})_{\partial Q_2} &= \mathbf{I}^T \mathbf{x} - \Gamma \varphi(\sigma) - \sqrt{\Gamma} \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} (\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \rho \varphi(\sigma)) \leq \\ &\leq D_2 - D_{21} < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом определения 2 поверхность ∂Q_2 является отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial Q_2 = \partial Q_2^-$.

Из неравенств (9), (12), (14), (16), (19) следует, что для границы $\partial\Omega$ справедливо соотношение $\partial\Omega = \partial\Omega_1^- \cup \partial\Omega_2^- \cup \partial Q_2^- \cup \partial\Omega_3^+ \cup \partial Q_1^+$. В силу определения 3 множество Ω является гиперболически инвариантным.

Теорема 2. Пусть для системы (2) выполнено условие 1 теоремы 1, $q_2 = (v\Gamma^{-1} - \alpha_1) > 0$, справедливы утверждения:

1) система уравнений (3) при $\mu = \mu_1 > v\Gamma^{-3/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\max_{\sigma} F_1(\sigma) = M_1$, $\min_{\sigma} F_1(\sigma) = m_1$, $D = D_1 < vm_1\Gamma^{-1/2}$;

2) система уравнений (3) при $\mu = \mu_2 < v\Gamma^{-3/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$, $0 < F_2(\sigma) < F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$,

$$\max_{\sigma} F_2(\sigma) = M_2, \quad \min_{\sigma} F_2(\sigma) = m_2,$$

$$D = D_4 > v\Gamma^{-1/2}M_2.$$

Тогда система (2) имеет гиперболически инвариантное множество.

Доказательство. Рассмотрим функции $V_1(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \Gamma^{1/2} F_1(\sigma)$, $V_2(\mathbf{z}) = \mathbf{I}^T \mathbf{x} + v\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} - D_4$, $V_3(\mathbf{z}) = \mathbf{I}^T \mathbf{x} + D_3$, $W_1(\mathbf{z}) = \mathbf{I}^T \mathbf{x} - D_2$, $W_2(\mathbf{z}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \Gamma^{1/2} F_2(\sigma)$, $W_3(\mathbf{z}) = \mathbf{I}^T \mathbf{x} + v\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} - D_1$, где функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы 2, для значений D_1 , D_2 , D_3 , D_4 выполняются неравенства:

$$D_1 < vm_1\Gamma^{-1/2}, \quad (20)$$

$$D_2 > \max\{vM_0\alpha_1^{-1}; D_4 - vm_2\Gamma^{-1/2}\}, \quad (21)$$

$$D_3 > \max\{vm_0\alpha_1^{-1}; vM_1\Gamma^{-1/2} - D_1\}, \quad (22)$$

$$D_4 > vM_2\Gamma^{-1/2}. \quad (23)$$

Определим поверхности

$$\partial\Omega_1 = \{\mathbf{z} : V_1(\mathbf{z}) = 0, W_1(\mathbf{z}) \leq 0, W_3(\mathbf{z}) \geq 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{\mathbf{z} : V_2(\mathbf{z}) = 0, W_1(\mathbf{z}) \leq 0, W_2(\mathbf{z}) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{\mathbf{z} : V_3(\mathbf{z}) = 0, W_2(\mathbf{z}) \geq 0, W_3(\mathbf{z}) \leq 0\},$$

$$\partial Q_1 = \{\mathbf{z} : W_1(\mathbf{z}) = 0, V_1(\mathbf{z}) \leq 0, V_2(\mathbf{z}) \geq 0\},$$

$$\partial Q_2 = \{\mathbf{z} : W_2(\mathbf{z}) = 0, V_3(\mathbf{z}) \geq 0, V_2(\mathbf{z}) \leq 0\},$$

$$\partial Q_3 = \{\mathbf{z} : W_3(\mathbf{z}) = 0, V_1(\mathbf{z}) \geq 0, V_3(\mathbf{z}) \geq 0\}.$$

В силу условия 1 теоремы 1, условия 2 теоремы 2 и неравенств (21), (22) множества $\partial\Omega_i$, $i = \overline{1,3}$, ∂Q_j , $j = \overline{1,3}$, не являются пустыми.

Пусть Ω – множество, ограниченное поверхностями $\partial\Omega_i$, $i = \overline{1,3}$, ∂Q_j , $j = \overline{1,3}$, тогда $\Omega = P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$, где $P_1 = \{\mathbf{z} : V_3(\mathbf{z}) \geq 0, W_1(\mathbf{z}) \leq 0\}$, $P_2 = \{\mathbf{z} : V_1(\mathbf{z}) > 0, W_3(\mathbf{z}) > 0\}$, $P_3 = \{\mathbf{z} : V_2(\mathbf{z}) < 0, W_2(\mathbf{z}) < 0\}$.

Для Ω справедливы соотношения $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3$, $\Omega_0 = \Omega \cap \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\} \neq \emptyset$, множество Ω_0 является замкнутым и ограниченным.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_1$. Если $\mathbf{z} \in \partial\Omega_1$, то выполняются соотношения (7), (8). В силу (9) и условия 1 теоремы 2 производная функции $V_1(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_1(\mathbf{z})_{\partial\Omega_1} > 0. \quad (24)$$

С учетом определения 2 поверхность $\partial\Omega_1$ является отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1^-$.

Пусть $\mathbf{z} \in \partial\Omega_2$, тогда

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} = D_4 - v\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (25)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma). \quad (26)$$

Используя (12), (25), (23), (26) и неравенство $q_2 = (v\Gamma^{-1} - \alpha_1) > 0$, находим производную функции $V_2(\mathbf{z})$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\mathbf{z})_{\partial\Omega_2} &= -\mathbf{I}^T \mathbf{x}(\alpha_1 - v\Gamma^{-1}) \geq \\ &\geq (v\Gamma^{-1} - \alpha_1)(D_4 - v\Gamma^{-1/2} M_2) > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Согласно определению 1 поверхность $\partial\Omega_2$ является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_2^+$.

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3$, в силу (14), (22) производная функции $V_3(\mathbf{z})$ на множестве $\partial\Omega_3$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_3(\mathbf{z})_{\partial\Omega_3} > 0. \quad (28)$$

С учетом определения 1 поверхность $\partial\Omega_3$ является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial\Omega_3 = \partial\Omega_3^+$.

Пусть $\mathbf{z} \in \partial Q_1$, тогда $\mathbf{I}^T \mathbf{x} = D_2$. Используя (16), (21), получаем, что для производной функции $W_1(\mathbf{z})$ на множестве ∂Q_1 выполняется соотношение

$$\dot{W}_1(\mathbf{z})_{\partial Q_1} < 0. \quad (29)$$

С учетом определения 1 поверхность ∂Q_1 является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial Q_1 = \partial Q_1^+$.

Если $\mathbf{z} \in \partial Q_2$, то

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma), \quad (30)$$

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} + v\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq D_4. \quad (31)$$

В силу (30), (31) и условия 2 теоремы 2 производная функции $W_2(\mathbf{z})$ на множестве ∂Q_2 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(\mathbf{z})_{\partial Q_2} &= \mathbf{I}^T \mathbf{x} - \Gamma \varphi(\sigma) - \Gamma \frac{dF_2(\sigma)}{d\sigma} (F_2(\sigma) + \rho\Gamma^{-1/2} \times \\ &\times \varphi(\sigma)) \leq \Gamma F_2(\sigma)(\mu_2 - v\Gamma^{-3/2}) < 0. \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом определения 2 поверхность ∂Q_2 является отрицательно инвариантной для множества Ω , $\partial Q_2 = \partial Q_2^-$.

Рассмотрим множество ∂Q_3 . Для $\mathbf{z} \in \partial Q_3$ справедливы соотношения:

$$\mathbf{I}^T \mathbf{x} + v\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = D_1, \quad (33)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma). \quad (34)$$

Используя (20), (33), (34), получаем, что для производной функции $W_3(\mathbf{z})$ на множестве ∂Q_3 выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \dot{W}_3(\mathbf{z})_{\partial Q_3} &= \mathbf{I}^T \mathbf{x}(v\Gamma^{-1} - \alpha_1) \leq \\ &\leq (v\Gamma^{-1} - \alpha_1)(D_1 - v\Gamma^{-1/2} m_1) < 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно определению 1 поверхность ∂Q_3 является положительно инвариантной для множества Ω , $\partial Q_3 = \partial Q_3^+$.

Из неравенств (24), (27), (28), (29), (32), (35) следует, что для границы $\partial\Omega$ справедливо соотношение $\partial\Omega = \partial\Omega_1^- \cup \partial\Omega_2^+ \cup \partial\Omega_3^+ \cup \partial Q_1^+ \cup \partial Q_2^- \cup \partial Q_3^+$. В силу определения 3 множество Ω является гиперболически инвариантным.

Теорема 3. Пусть система (2) имеет гиперболически инвариантное множество Ω , $\Omega_0 = \Omega \cap P_0$, $P_0 = \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0\}$, $P_\Delta = \{\mathbf{z} : \sigma = \sigma_0 + \Delta\}$, U_1 – оператор сдвига по траекториям системы (2), $U_1(\Omega_0) \subset P_\Delta$, U_2 – отображение сдвига фазового пространства, $U_2(\mathbf{z}) = colon(\mathbf{x}, \sigma - \Delta)$, $U = U_2 \circ U_1$, $U(\Omega_0) \subset P_0$, вращение векторного поля $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - U(\mathbf{x})$ на границе $\partial\Omega_0$ множества Ω_0 отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$. Тогда система (2) имеет предельный цикл второго рода.

Доказательство. Так как вращение $\gamma(Q, \partial\Omega_0)$ векторного поля Q на $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то в силу теоремы 5.15 [14] оператор U на множестве Ω_0 имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\mathbf{x}^* \in \Omega_0$, $U\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$. Точка $(\mathbf{x}^*, \sigma_0)$ является неподвижной для оператора $U_2 \circ U_1$, $(U_2 \circ U_1)(\mathbf{x}^*, \sigma_0) = (\mathbf{x}^*, \sigma_0)$. Из определения отображений U_1 и U_2 для решения с начальным условием $(\mathbf{x}^*, \sigma_0)$ вытекают равенства: $\mathbf{x}(t_{\mathbf{x}^*}) = \mathbf{x}^*$, $\sigma(t_{\mathbf{x}^*}) = \sigma_0 + \Delta$. Система (2) имеет предельный цикл второго рода, содержащийся во множестве Ω .

Определение 4. Пусть система (2) имеет гиперболически инвариантное множество Ω , со-

держашее цикл второго рода, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = -1$. Тогда цикл второго рода называется гиперболическим.

Практические исследования

Рассмотрим поисковую систему фазовой автоподстройки, описываемую операторным уравнением [1-3]

$$p\sigma(t) + \Omega_m K(p)F(\sigma(t)) = \Omega_n + f(t), \quad (36)$$

где $f(t) = (\varepsilon_1 \Omega_m t + \varepsilon_0) -$ функция, характеризующая закон поиска фазовой автоподстройки. Перейдем в уравнении (36) к новому времени $\tau = \Omega_m t$. Переменную τ переобозначим через t . В случае дробно-рационального фильтра

$$K(p) = \frac{A_0 p^2 + A_1 p + A_2}{B_0 p^2 + B_1 p}, \quad \text{замены переменных}$$

$\dot{\sigma} = x_2 + \rho\varphi(\sigma)$, $\dot{x}_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma)$, где $\varphi(\sigma) = F(\sigma) - \gamma$, $\gamma = \varepsilon_1 B_1 A_2^{-1}$, $\rho = -A_0 B_0^{-1}$, $\Gamma = B_0^{-1} \times (A_1 + \rho B_1)$, уравнение (36) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \rho\varphi(\sigma), \quad (37)$$

для которой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} v \\ -\Gamma \end{pmatrix}$,

$v = B_0^{-1}(B_1\Gamma - A_2)$, $\alpha_1 = B_0^{-1}B_1$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если

$\Gamma > 0$, $v > 0$, то для системы (37) выполнено условие 1 теоремы 1, при этом $\mathbf{c}^T \mathbf{A} = \mathbf{l}^T = (1; 0)$, матрица $\mathbf{A}$ имеет два собственных значения $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = 0$.

Пример 1. Рассмотрим систему (37), для которой $\alpha_1 = 5/4$, $\Gamma = 5/4$, $v = 5/16$, $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$, $\gamma = 0.42$, $\rho = -10.2$. Система (37) при $\rho = 0$, $\det \mathbf{A} \neq 0$ рассмотрена в работе [8], где получены условия существования циклов второго рода. Если $\det \mathbf{A} = 0$, то не выполняются условия 2, 3 теоремы 3.15.1 [8]. Для (37) найдем $q_1 = (\alpha_1 - v\Gamma^{-1}) = 1 > 0$, $\max_{\sigma} \varphi(\sigma) = M_0 = 1 - \gamma > 0$, $\min_{\sigma} \varphi(\sigma) = -m_0 = -(1 + \gamma) < 0$. В рассматриваемом примере выполняется условие 1 теоремы 1.

Система (3) при $\mu = \mu_1 = v\Gamma^{-3/2} + 10^{-7} = 0.2236$, $D = D_1 = 2.7$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ с начальными условиями $y_1(0) = 9.9049$, $\sigma(0) = 0$, $\max_{\sigma} F_1(\sigma) = M_1 = 9.738$, $\min_{\sigma} F_1(\sigma) = m_1 = 9.9102$, $D = D_1 < v\mu_1\Gamma^{-1/2}$.

Система уравнений (3) при $\mu = 0$, $D = D_{21} = 0.145 + 10^{-7} > vM_0\alpha_1^{-1}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$ с начальными условиями $y_2(0) = 7.2358$, $\sigma(0) = 0$, $0 < F_2(\sigma) < F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Для (37) выполнены условия 2, 3 теоремы 1, система (37) имеет гиперболически инвариантное множество Ω . Построим множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{\mathbf{z} : \sigma = 0\}$. Используя (4), (5), (6), находим $D_1 = 2.7$, $D_2 = 0.145$, $D_3 = 0.355$. В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$L_1 : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow x_2 = 9.9049\sqrt{1.25},$$

$$L_2 : \mathbf{l}^T \mathbf{x} + v\Gamma^{-1}\mathbf{c}^T \mathbf{x} = D_1 \Leftrightarrow x_1 + 0.25x_2 = 2.7,$$

$$L_3 : \mathbf{l}^T \mathbf{x} = -D_3 \Leftrightarrow x_1 = -0.355,$$

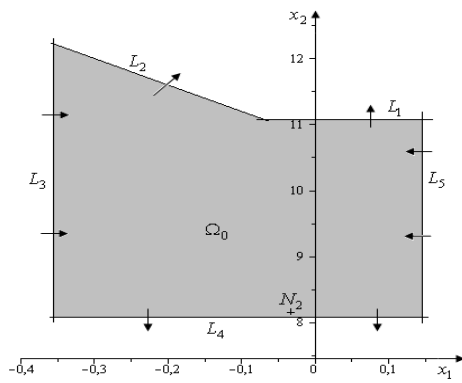
$$L_4 : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow x_2 = 7.2358\sqrt{1.25},$$

$$L_5 : \mathbf{l}^T \mathbf{x} = D_2 \Leftrightarrow x_1 = 0.145.$$

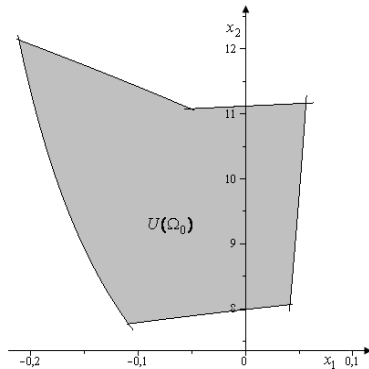
На рисунке 1,а изображена область Ω_0 ограниченная линиями L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 . Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (37).

Рассмотрим оператор $U = U_2 \circ U_1$, определенный в теореме 3, где U_1 – оператор сдвига по траекториям системы (37), U_2 – отображение сдвига фазового пространства. Численными методами находится множество $U(\Omega_0)$. На рисунке 1,б изображено множество $U(\Omega_0)$. На рисунке 1,в представлена линия L , описываемая вектором $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - U(\mathbf{x})$ при прохождении $\mathbf{x}$ границы $\partial\Omega_0$. Численно показывается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = -1$. В силу теоремы 3 и определения 4 система (37) имеет гиперболический цикл второго рода.

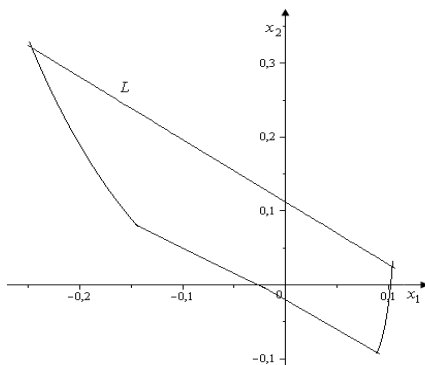
Использование вращения векторного поля позволяет расширить область параметров системы (37) для циклов второго рода. Оставим гиперболически инвариантное множество Ω без изменений, будем увеличивать значение ρ системы (37), обозначим U_{ρ_1} оператор, определяемый значением ρ_1 . При увеличении ρ_1 множество Ω перестает быть гиперболически инвариантным, но $U_{\rho_1}(\Omega_0) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$. Определим непрерывное векторное поле $Q_{\rho_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - U_{\rho_1}(\mathbf{x})$.



а



б

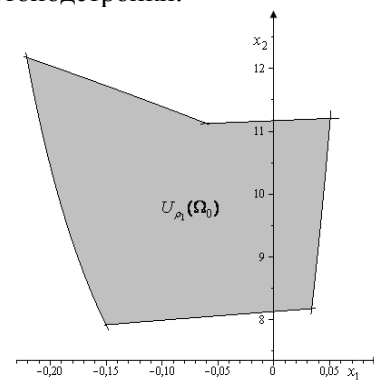


в

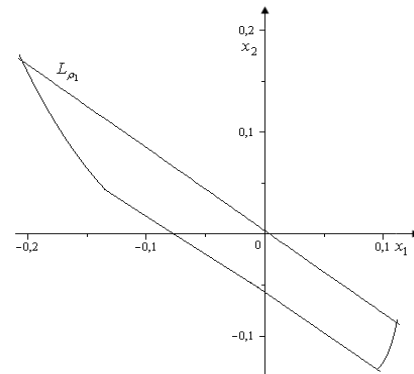
Рисунок 1 – Множества, определяющие векторное поле Q :а – сечение Ω_0 для множества Ω ;б – множество $U(\Omega_0)$;в – линия L , определяемая векторным полем Q

Пусть $\rho = \rho_1 = -8.2$, тогда численными методами находится $U_{\rho_1}(\Omega_0)$. На рисунке 2,а изображено множество $U_{\rho_1}(\Omega_0)$. На рисунке 2,б представлена линия L_{ρ_1} , описываемая вектором $Q_{\rho_1}(x) = x - U_{\rho_1}(x)$ при прохождении x границы $\partial\Omega_0$. Численно показывается, что вращение векторного поля Q_{ρ_1} на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q_{\rho_1}, \partial\Omega_0) = -1$. Оператор U_{ρ_1} имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (37). Таким

образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить значение ρ_1 от $\rho = -10.2$ до $\rho_1 = -8.2$, при этом значение ρ увеличилось на 20%. Численно показывается, что система (37) имеет цикл второго рода с начальными условиями $x_1(0) = -0.0336$, $x_2(0) = 8.16$, $\sigma(0) = 0$. Начальные условия цикла определяют точку $N_2(-0.0336; 8.16) \in \Omega_0$, точка N_2 изображена на рисунке 1,а. Гиперболический цикл определяет область притяжения состояний равновесия, при уменьшении ρ происходит расширение области притяжения состояний равновесия, что приводит к появлению дополнительных режимов синхронизации системы фазовой автоподстройки.



а



б

Рисунок 2 – Множества, определяющие векторное поле Q_{ρ_1} системы (37) при $\rho_1 = -8.2$:а – множество $U_{\rho_1}(\Omega_0)$;б – линия L_{ρ_1} , определяемая векторным полем Q_{ρ_1}

Пример 2. Рассмотрим систему (37), для которой $\alpha_1 = 1$, $\Gamma = 1.9$, $\nu = 2$, $\phi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$, $\gamma = 0.55$, $\rho = -9.6$. Для (37) найдем $q_2 = (\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) < 0$, $\max_{\sigma} \phi(\sigma) = M_0 = 1 - \gamma > 0$, $\min_{\sigma} \phi(\sigma) = -m_0 = -(1 + \gamma) < 0$. В рассматриваемом

примере выполняется условие 1 теоремы 1.

Система (3) при $\mu = \mu_1 = \nu\Gamma^{-3/2} + 10^{-7} = 0.7637$, $D = D_1 = 8$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ с начальными условиями $y_1(0) = 5.7837$, $\sigma(0) = 0$, $\max_{\sigma} F_1(\sigma) = M_1 = 5.7903$, $\min_{\sigma} F_1(\sigma) = m_1 = 5.5337$, $D = D_1 < \nu m_1 \Gamma^{-1/2}$.

Система уравнений (3) при $\mu = \mu_2 = \nu\Gamma^{-3/2} - 10^{-7} = 0.7637$, $D = D_4 = 5.29$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$ с начальными условиями $y_2(0) = 3.599$, $\sigma(0) = 0$, $0 < F_2(\sigma) < F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\max_{\sigma} F_2(\sigma) = M_2 = 3.6274$, $\min_{\sigma} F_2(\sigma) = m_2 = 3.109$, $D = D_4 > \nu M_2 \Gamma^{-1/2}$.

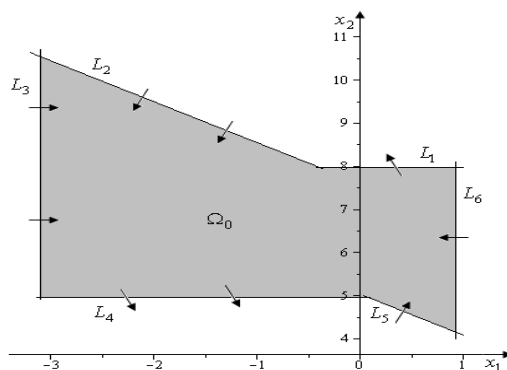
Для (37) выполнены условия 1, 2 теоремы 2, система (37) имеет гиперболически инвариантное множество Ω . Построим множество $\Omega_0 = \Omega \cap \{z: \sigma = 0\}$. Используя (20), (21), (22), (23), находим $D_1 = 8$, $D_2 = 0.92$, $D_3 = 3.101$, $D_4 = 5.9$. В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$\begin{aligned} L_1: \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow x_2 = 5.7837\sqrt{1.9}, \\ L_2: \mathbf{l}^T \mathbf{x} + \nu\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= D_1 \Leftrightarrow x_1 + 1.053x_2 = 8, \\ L_3: \mathbf{l}^T \mathbf{x} &= -D_3 \Leftrightarrow x_1 = -3.101, \\ L_4: \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow x_2 = 3.599\sqrt{1.9}, \\ L_5: \mathbf{l}^T \mathbf{x} + \nu\Gamma^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= D_4 \Leftrightarrow x_1 + 1.053x_2 = 5.29, \\ L_6: \mathbf{l}^T \mathbf{x} &= D_2 \Leftrightarrow x_1 = 0.92. \end{aligned}$$

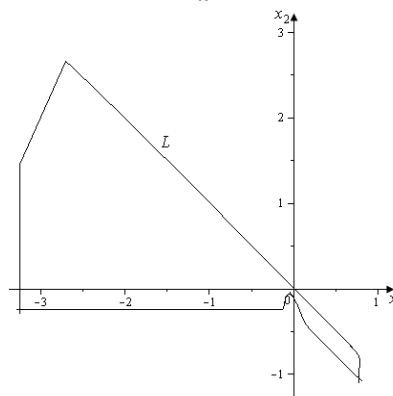
На рисунке 3,а изображена область Ω_0 , ограниченная линиями $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$. Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (37).

Рассмотрим оператор $U = U_2 \circ U_1$, определенный в теореме 3, где U_1 – оператор сдвига по траекториям системы (37), U_2 – отображение сдвига фазового пространства. Численными методами находится множество $U(\Omega_0)$. На рисунке 3,б представлена линия L , описываемая вектором $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - U(\mathbf{x})$ при прохождении $\mathbf{x}$ границы $\partial\Omega_0$. Численно показывается, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = 1$. В силу теоремы 3 система (37) имеет цикл второго рода.

Численно показывается, что увеличение значения ρ приводит к бифуркации периода цикла второго рода.



а



б

Рисунок 3 – Множества, определяющие векторное поле Q :

а – сечение Ω_0 для множества Ω ;

б – линия L , определяемая векторным полем Q

На рисунке 4,а изображена проекция цикла системы (37) при $\rho = -0.2$ на плоскость (x_1, x_2) . На рисунке 4,б изображена проекция цикла системы (37) на плоскость (x_2, t) .

Цикл второго рода определяет для системы фазовой автоподстройки пачечное биение с пятью импульсами в пачке [7], численно показывается, что число импульсов в пачке зависит от параметров Γ , γ , ρ системы (37). При $\Gamma = 1.74$, $\gamma = 0.82$, $\rho = -3.6$ в системе наблюдаются пачечные биения с тремя импульсами в пачке. В работе [7] рассмотрена система фазовой автоподстройки, описываемая операторным уравнением (36) при $K(p) = \frac{Tp}{(1+Tp)(1+T_1p)}$, $f(t) = 0$,

получены условия пачечных биений с различным числом импульсов в пачке, предложено использовать системы фазовой синхронизации в качестве модели нейроноподобного элемента [7]. Применительно к динамике нейрона переменная x_2 интерпретируется как описывающая изменение мембранного потенциала. Таким образом, поисковая система фазовой автоподстройки частоты, рассмотренная в примере 2, может быть

использована как модель нейроноподобного элемента.

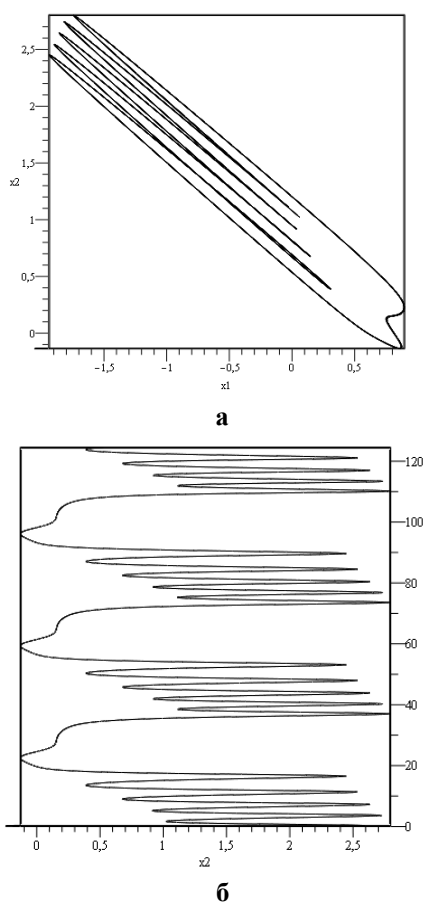


Рисунок 4 – Пачечное биеение системы (37) при $\rho = -0.2$:

а – проекция цикла системы (37) на плоскость (x_1, x_2) ;

б – проекция цикла системы (37) на плоскость (x_2, t)

Закключение. В работе предложен численно-аналитический подход определения вращательных режимов системы ФАП: аналитически определяются гиперболически инвариантные множества, численно находится вращение векторного поля, определяющее условия существования циклов второго рода. Использование вращение векторного поля для определения неподвижных точек оператора, вместо теоремы Брауэра, позволило получить условия существования гиперболических циклов, определяющих области притяжения для состояний равновесия поисковой системы ФАП. Использование гиперболически инвариантных множеств и вращения векторного поля для циклов второго рода может при-

вести к увеличению параметра системы на 20%. Прикладное значение полученных результатов заключается в том, что они позволяют определить поисковые системы, как имеющие режимы синхронизации, так и, обладающие пачечными биеениями.

Библиографический список

1. Витерби Э.Д. Принципы когерентной связи / Э.Д. Витерби. - М.: Сов. радио, 1970.-392 с.
2. Шахгильдян В.В. Системы фазовой автоподстройки частоты / В.В. Шахгильдян, А.А. Ляховкин. - М.: Связь, 1972.- 448 с.
3. Капранов М.В. Теория колебаний в радиотехнике / М.В. Капранов, В.Н. Кулешов, Г.М. Уткин. - М.:Наука, 1984. - 320 с.
4. Шахтарин Б. И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием / Б.И. Шахтарин. - М.: Машиностроение, 1991.- 192 с.
5. Матросов В.В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка / В.В. Матросов // Изв. вузов. Радио - физика. - 2006. -Т.49.- №3.- С.267-278.
6. Матросов В.В. Динамический хаос в фазовых системах / В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев. - Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.- 258 с.
7. Шалфеев В.Д. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации / В.Д. Шалфеев, В.В. Матросов. - Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013.- 366 с.
8. Леонов Г.А. Математические проблемы теории фазовой синхронизации / Г.А. Леонов, В.Б. Смирнова. - СПб.: Наука, 2000.- 400 с.
9. Леонов Г.А. Частотные методы в теории колебаний / Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. - СПб., 1992.- 368 с.
10. Мамонов С.С. Условия существования предельных циклов второго рода системы дифференциальных уравнений. II / С.С. Мамонов // Дифференциальные уравнения.-2010. -Т. 46.- № 8.- С.1075-1084.
11. Мамонов С.С. Динамика астатической поисковой системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2010. № 32. С.48-55.
12. Мамонов С.С., Ионова И.В. Угловая модуляция в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 1 (43). С.39-44.
13. Мамонов С.С. Вращательные режимы системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2009. № 28. С.42-48.
14. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. - М.: Наука, 1966.-332 с.

УДК 621.391:616.12

В.Г. Андреев, Т.Ф. Нгуен**ОБРАБОТКА КАРДИОСИГНАЛОВ
НА ФОНЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ПОМЕХ**

В работе произведены синтез и анализ эффективности двух упрощённых адаптивных алгоритмов обработки кардиологических сигналов на фоне комбинированных помех. Показано, что применение предлагаемых алгоритмов позволяет уменьшить в 1,17...4,9 раз количество вычислительных операций на адаптацию по сравнению с оптимальным решением при сохранении заданного качества подавления помех.

Ключевые слова: кардиосигналы, комбинированные помехи, обеляющий фильтр, подавление помех, адаптивная обработка сигналов.

Введение. Проблема оперативного контроля состояния здоровья актуальна для широкого круга людей. Отметим, что, наряду со сложными диагностическими инвазивными (требующими исследования биологических жидкостей) методами оценки здоровья человека, существуют эффективные неинвазивные методики решения задачи экспресс-диагностики состояния организма человека по его пульсу [1]. При этом ключевую роль играет анализ динамики изменения параметров кардиосигналов. Их получение представляет собой относительно недорогой, но ценный метод инструментальной диагностики в современной медицине.

Вместе с тем при получении кардиосигналов характерно мешающее воздействие комбинированных (комплексов коррелированных и некоррелированных) помех на сигналы, снимаемые кардиодатчиками [2]. Помехи деструктивно влияют на результат диагностики, поэтому борьба с ними является одной из важных задач обработки кардиосигналов. Их решение предполагает обеление коррелированной мешающей компоненты до уровня некоррелированного шума [3].

Оптимальное решение основано на расчёте параметров обеляющего фильтра путём обращения корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ комбинированных помех и сопряжено со значительными вычислительными затратами [3-5]. Поэтому часто не предполагается адаптация к изменяющейся мощности P_n некоррелированного шума, величина которого обычно мала по сравнению с мощностью коррелированной компоненты. Пренебрежение изменениями мощности P_n шума в процессе наблюдения приводит к недоиспользованию возможностей по фильтрации мешающих

компонент обрабатываемого процесса и, как следствие, к снижению эффективности медицинской диагностики.

Цель работы — сокращение вычислительных затрат алгоритма обращения корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ комбинированных помех при изменении мощности P_n некоррелированной компоненты для задач адаптивной обработки кардиологических сигналов.

Постановка задачи. Структурная схема обработки кардиосигналов на фоне комбинированных помех показана на рисунке 1.

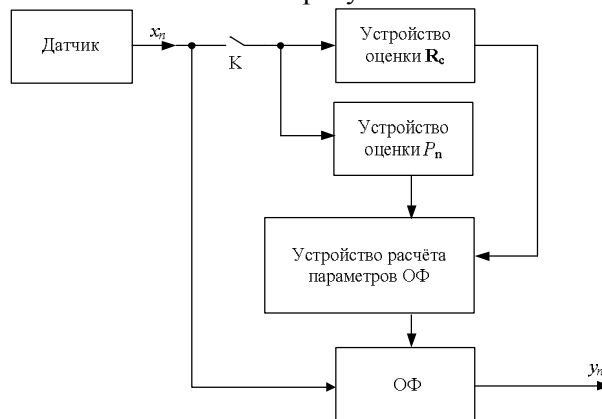


Рисунок 1 — Структурная схема системы обработки кардиосигналов

На рисунке 1 под x_n подразумеваются дискретные цифровые отсчёты кардиосигналов (полезные сигналы), снимаемые кардиодатчиками; под y_n — дискретные цифровые отсчёты выходного процесса (результат обработки); $\mathbf{R}_c$ — корреляционная матрица коррелированных мешающих компонентов входного процесса; ОФ — обеляющий фильтр; К — электронный ключ. При его размыкании на вход системы подаются только комбинированные помехи (режим

измерения параметров помех), а при подключении ключа К система работает в режиме обработки кардиосигналов на фоне комбинированных помех, параметры которых считаются неизменными в течение заданного интервала наблюдения (десятки секунд).

Построение фильтра обеления помех сопряжено с обращением корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ в условиях быстрых изменений мощности P_n некоррелированного шума. Как показали эксперименты, предположение о сохранении параметров коррелированных мешающих компонент справедливо для широкого круга задач медицинской диагностики по пульсу и обусловлено неизменностью свойств источников сосредоточенных по спектру помех на интервале наблюдения, который составляет от десятков секунд до минут. Вместе с тем величина P_n мощности некоррелированного шума подвержена значительным изменениям из-за особенностей воздействия внешних мешающих факторов, внутренних шумов кардиодатчика и вариаций состояния организма человека, не связанных непосредственно с предметом диагностики [6].

Тогда матрица $\mathbf{R}$ может быть представлена суммой корреляционных матриц редко изменяющейся коррелированной $\mathbf{R}_c$ и флуктуирующей некоррелированной $P_n \mathbf{I}$ компонент соответственно:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I}, \quad (1)$$

где $\mathbf{R}$ — $(q+1) \times (q+1)$ -мерная корреляционная матрица комбинированных помех, q — порядок нерекурсивного обеляющего фильтра; $\mathbf{R}_c$ — $(q+1) \times (q+1)$ -мерная корреляционная матрица коррелированной компоненты мешающего процесса с нормированной к единице дисперсией; P_n — относительная мощность шума (некоррелированной компоненты), $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Отметим, что матрица $\mathbf{R}$ для рассматриваемого квазистационарного мешающего процесса является эрмитовой и теплицевой, а её структура имеет ленточный вид [7]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 + P_n & R_1^* & \cdots & R_q^* \\ R_1 & 1 + P_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_1^* \\ R_q & \cdots & R_1 & 1 + P_n \end{bmatrix},$$

где R_j — нормированные к дисперсии коррелированной составляющей коэффициенты автокорреляции j -го порядка, $j=1, 2, \dots, q$; * — знак комплексного сопряжения. При этом модули коэффициентов автокорреляции соответствуют

наиболее распространённой на практике гауссовской форме огибающей спектральной плотности мощности помехи [8]:

$$|R_j| = \exp[-(\pi \Delta FT j)^2 / 2, 8],$$

где ΔFT — относительная ширина спектральной моды коррелированной мешающей компоненты.

Для реализации оптимальной обработки кардиосигналов на фоне помех необходимо найти вектор $\mathbf{a}^T = [a_1; a_2; \dots; a_q]$ коэффициентов обеляющего коррелированные мешающие компоненты нерекурсивного фильтра q -го порядка. Предполагается нормировка к единице нулевого коэффициента a_0 импульсной характеристики обеляющего фильтра ($a_0=1$), что даёт возможность представить уравнение Юла – Уолкера [5] в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_c^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{ne}^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где σ_{ne}^2 — дисперсия возбуждающего шума.

Выражение (2) может быть представлено в виде:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}^T = [R_1; R_2; \dots; R_q]$ — автокорреляционная последовательность мешающего коррелированного процесса с единичной дисперсией $R_0=1$, $\mathbf{R}_c$ — корреляционная матрица, аналогичная представленной в выражении (1), мерность которой сокращена до $(q \times q)$.

В условиях присутствия некоррелированной аддитивной компоненты мешающего процесса оптимальное решение принимает вид:

$$\mathbf{a}_{opt} = -(\mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{r}. \quad (3)$$

Аналитическое решение. Проанализируем два метода упрощённого расчёта обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ в формуле (1).

Первый метод. Воспользуемся известной формулой разложения суммы или разности квадратов на множители:

$$\mathbf{R}_c^2 - (P_n \mathbf{I})^2 = (\mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I})(\mathbf{R}_c - P_n \mathbf{I}). \quad (4)$$

При малых значениях относительной мощности некоррелированной компоненты ($P_n < 10^{-3}$) её возведённое в квадрат значение $P_n^2 < 10^{-6}$ представляет собой второй уровень малости и может быть положено равным нулю $P_n^2 \approx 0$. Поэтому из выражения (4) получим оценку обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ по приближенной формуле следующим образом:

$$(\mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I})^{-1} \approx -(\mathbf{R}_c - P_n \mathbf{I}) \mathbf{R}_c^{-2}. \quad (5)$$

Ниже будет проанализирована вычислительная эффективность предложенного алгоритма приближённого расчёта обратной матрицы

комбинированных помех и дана оценка качества их подавления.

Второй метод. Аналогично (4) сумма кубов может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{R}_c^3 + (P_n \mathbf{I})^3 = (\mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I})[\mathbf{R}_c^2 - P_n \mathbf{R}_c + (P_n \mathbf{I})^2]. \quad (6)$$

Как и в первом предложенном методе, при малых значениях мощности шума ($P_n < 10^{-3}$) значение $P_n^3 < 10^{-9}$ третьей степени малости может быть отброшено путём обнуления ($P_n^3 \approx 0$). Поэтому из выражения (6) мы можем получить приближенную формулу расчёта обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$:

$$(\mathbf{R}_c + P_n \mathbf{I})^{-1} \approx -[\mathbf{R}_c^2 - P_n \mathbf{R}_c + (P_n \mathbf{I})^2] \mathbf{R}_c^{-3}. \quad (7)$$

Очевидно, что если свойства коррелированных помех не изменяются, то коэффициенты матрицы $\mathbf{R}_c$ фиксируются. При этом в формулах (5) и (7) величины $\mathbf{R}_c^{-3}$, $\mathbf{R}_c^{-2}$, $\mathbf{R}_c$ будут неизменны на длительном (до нескольких минут) интервале наблюдения, а значения P_n изменяются в течение единиц десятков секунд, что даёт возможность сохранить значения матриц $\mathbf{R}_c^{-3}$, $\mathbf{R}_c^{-2}$, $\mathbf{R}_c$ в памяти системы обработки. Поэтому при вариациях относительной мощности P_n шума расчёт обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ по формулам (5) или (7) упрощается по сравнению с оптимальным алгоритмом (3) общего вида.

Для объективной оценки преимуществ предлагаемых упрощённых процедур адаптивной обработки кардиологических сигналов произведём оценку вычислительной эффективности и качества подавления помех.

Экспериментальные исследования. Сравним вычислительные затраты на адаптацию оптимального (общего вида) и двух предлагаемых упрощённых алгоритмов обработки кардиосигналов. Положим, что m — число изменений относительной мощности P_n шума ($m \geq 0$) на интервале наблюдения при сохранении статистических свойств коррелированной компоненты ($\mathbf{R}_c = \text{const}$). В таблице приведены приближенные формулы для оценки вычислительных затрат в описанном варианте адаптации только к величине P_n мощности некоррелированной мешающей компоненты. Из анализа сведённых в таблицу данных следует, что при третьем порядке ($q=3$) обеляющего фильтра и числе $m=3$ изменений мощности некоррелированного шума первый метод даёт выигрыш μ в вычислительных затратах в $\mu=2,12$ раза по сравнению с оптимальным алгоритмом (3), а второй метод позволяет сократить их на величину $\mu=1,17$. С ростом числа изменений величины P_n выигрыши нарастают. Так, при $m=15$ вычислительные затраты сокращаются в $\mu=4,9$ раз для первого метода и в $\mu=2$ раза для второго метода.

Таблица — Вычислительные затраты

Оптимальный метод	Первый предлагаемый метод	Второй предлагаемый метод
Общее количество арифметических операций		
$(m+1)(q+1)^3 + (m+1)(q+1)$	$(q+1)^3 + 2(q+1)^2 + 2(m+1) \times (q+1)$	$(q+1)^3 + 4(q+1)^2 + 2(m+1)(4q+1)$

На рисунке 2 представлены зависимости $\mu(m)$ для двух предлагаемых методов. Они отражают вычислительную эффективность μ (соотношение между общим количеством арифметических операций, необходимых для предлагаемых (5), (7) и оптимального решений для расчёта коэффициентов обеляющего фильтра q -го порядка) при разном числе m изменений относительной мощности P_n некоррелированного шума за период наблюдения.

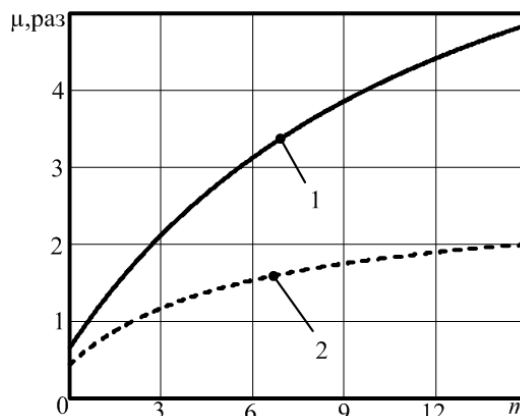


Рисунок 2 — Зависимости выигрыша от числа изменений мощности шума

На рисунке 2 обозначены: сплошной линией 1 — выигрыш μ в вычислительных затратах для первого метода (5), а пунктирной линией 2 — для второго метода (7). Из рисунка 2 следует, что при числе $m \leq 2$ изменений мощности P_n некоррелированного шума в течение интервала наблюдения выигрыши не наблюдаются ($\mu < 1$ для второго метода) или незначительны ($\mu \approx 1$ для первого метода). Это означает, что расчёт коэффициентов обратной матрицы $\mathbf{R}^{-1}$ по формулам (5), (7) не упрощается по сравнению со строгими алгоритмами обращения матриц общего вида (3). Однако на практике мощности P_n некоррелированного шума подвержены быстрым флуктуациям, поэтому обычно $m \geq 3 \dots 15$ на интервале наблюдения при экспресс-диагностике. Отметим, что при холтеровском мониторингировании число m изменений величины P_n в процессе суточного наблюдения может составлять сотни и тысячи, т.е. оба метода дают значительные ($\mu > 2 \dots 7$) выигрыши.

Для анализа качества подавления (обеления) комбинированных помех предлагаемыми упрощёнными методами воспользуемся критерием среднеквадратического отклонения получаемых решений от оптимальных. Обозначим через вектор $\mathbf{a}_1$ строгое решение (3) задачи нахождения левого вектора-столбца обратной матрицы, т.е. $\mathbf{R} \mathbf{a}_1 = \mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ — крайний левый вектор-столбец единичной матрицы $\mathbf{I}$. Рассчитанные по (5) приближённые значения крайних левых векторов-столбцов обратных матриц $\mathbf{W} \approx \mathbf{R}^{-1}$ для первого метода обозначим через $\mathbf{a}_2$ и через $\mathbf{a}_3$ — для второго метода (7).

Для сравнения эффективности используемых алгоритмов рассмотрим квадраты E_1 , E_2 длин векторов невязок между точным $\mathbf{R} \mathbf{a}_1 = \mathbf{i}$ и приближёнными $\mathbf{R} \mathbf{a}_2$, $\mathbf{R} \mathbf{a}_3$ первым и вторым предлагаемым (соответственно) решениями:

$$E_1 = (\mathbf{R} \mathbf{a}_2 - \mathbf{i})^T (\mathbf{R} \mathbf{a}_2 - \mathbf{i}), E_2 = (\mathbf{R} \mathbf{a}_3 - \mathbf{i})^T (\mathbf{R} \mathbf{a}_3 - \mathbf{i}). \quad (8)$$

Анализ зависимостей $E_1(P_n)$, $E_2(P_n)$ объективно показал качество обеления по критерию (8) предлагаемых двух упрощённых алгоритмов (5), (7). Формирование приведенной на рисунке 3 зависимости десятичного логарифма величины E_1 , E_2 для первого (сплошная линия 1) и второго (пунктирная кривая 2) алгоритмов (соответственно) от относительной мощности P_n некоррелированного шума произведено при порядке $q=4$ обеляющего фильтра.

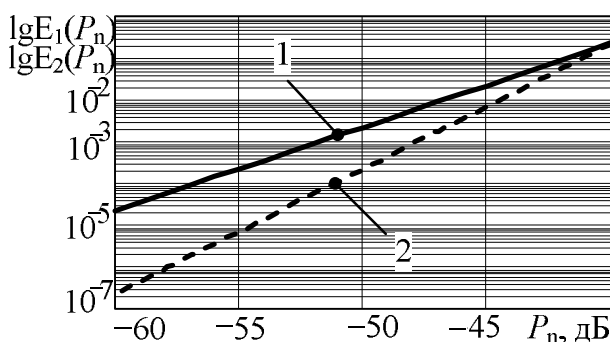


Рисунок 3 — Логарифмические зависимости длины вектора невязки от мощности шума

Из рисунка 3 видно, что второй метод (7) дает лучшее качество обеления по сравнению первым методом. При малых значениях относительной мощности шума ($P_n \leq 10^{-3}$) выигрыш E_1/E_2 второго метода по отношению к первому в точности вычисления коэффициентов крайнего левого столбца обратной матрицы $\mathbf{W}$ достигает десятков (до 100) раз. С ростом мощности шума ($P_n > 10^{-3}$) эффективность обеления падает для обоих предлагаемых методов (5), (7), что обусловлено нарушением исходного предположения о малости P_n ($P_n \ll 1$), на котором базировался синтез предлагаемых упрощённых алгоритмов.

Поэтому наиболее актуальной областью, в которой необходимо осуществлять подавление помех, является ситуация, когда $P_n \ll 1$, что и наблюдается, как правило, на практике [6].

Выводы. Таким образом, в условиях изменения мощности $P_n \leq 10^{-3}$ некоррелированного шума анализ эффективности первого предлагаемого адаптивного алгоритма (5) расчёта коэффициентов обеляющего фильтра показал, что имеется выигрыш в $\mu=2,12...4,9$ раз в вычислительных затратах по сравнению с оптимальным решением (см. таблицу). Для второго предлагаемого метода (7) обеспечивается меньшее сокращение (в 1,17...2 раза) вычислительных затрат, т.е. первый метод требует в 2...2,5 раза меньше вычислений для своего осуществления, чем второй. Однако качество обеления комбинированных помех второго метода в $E_1/E_2=1,8...100$ раз выше, чем у первого метода (см. рисунок 3), что даёт возможность выбора конкретного алгоритма для обработки кардиологических сигналов при заданных ограничениях на вычислительные затраты и/или качество обеления комбинированных помех. Выигрыши μ в вычислительных затратах достигаются за счёт учёта априорной информации о стабильности корреляционных свойств коррелированной компоненты мешающего процесса и быстрых изменениях мощности шума на интервале наблюдения.

Библиографический список

1. Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.М. Математический анализ измерений сердечного ритма при стрессе. — М.: Наука, 1984. — 221 с.
2. Мониторинг биомедицинских сигналов в автоматизированных комплексах ранней диагностики / В.А. Фесечко, В.Л. Ткаченко, Ю.С. Синекон и др. // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». — 2010. — № 2. — С. 154-160. (URL: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/natural/eis/2010_2/25_Fesechko.pdf).
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. — М.: СПб: Питер, 2006. — 750 с.
4. Андреев В.Г., Нгуен Т.Ф., Нарбеков А.Ю. Адаптивная фильтрация комбинированных помех // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 3 (45). С. 38-41.
5. Андреев В.Г. Оптимизация авторегрессионных моделей мешающих радиоотражений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2008. — Т. 51. — № 7. — С. 40-47.
6. Федотов А.А., Акулов С.А. Измерительные преобразователи биомедицинских сигналов систем клинического мониторинга. — М.: Радио и связь, 2013. — 250 с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с.
8. Обработка оптических зондирующих сигналов в задаче медицинской диагностики по пульсу / Анд-

реев В.Г., Кирьяков А.А., Коновалов Е.В., Юкин С.А.
// Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред: материалы IV Всероссийской научной

школы и конференции.— Муром: Вычислительный центр МИВЛГУ, 2009.— С. 229-230.

УДК 621.372

А.С. Лапшин, Р.И. Кубалов

МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО ШИРОКОПОЛОСНОГО РЕЖЕКТОРНОГО СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА С КООКСИАЛЬНО-ПОЛОСКОВЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

Представлены моделирование, оптимизация и экспериментальное исследование микроволнового широкополосного режекторного стержневого эллиптического фильтра с коаксиально-полосковыми резонаторами. Результаты моделирования сопоставлены с экспериментальными данными. Приведены конструкция и основные электрические характеристики фильтра: амплитудно-частотная характеристика, коэффициент стоячей волны по напряжению, коэффициент отражения, распределения напряженностей электрического и магнитного полей.

Ключевые слова: широкополосный режекторный стержневой эллиптический фильтр, компьютерное моделирование, экспериментальное исследование, электрические характеристики.

Введение. В связи с задачей миниатюризации пассивных частотно-селективных цепей в настоящее время отдается предпочтение разработке фильтров с аппроксимацией электрических характеристик эллиптическими функциями Якоби. Такие фильтры называют эллиптическими фильтрами (ЭФ) или фильтрами Золотарева – Кауэра [1–4]. ЭФ имеют большую крутизну затухания и меньшее число схемных элементов по сравнению с полиномиальными фильтрами Баттерворта и Чебышева. Фильтры СВЧ в объемном исполнении позволяют передавать мощности в сотни ватт и более. Указанные преимущества определяют все возрастающее применение микроволновых ЭФ в сложных СВЧ системах и актуальность разработки вариантов их реализации на полосковых волноводах. Перспективным направлением в современном проектировании является моделирование микроволновых устройств, которое позволяет сократить число макетирований и возможность отказаться от элементов настройки. *Цель работы* – выполнить расчет, компьютерное моделирование, параметрическую оптимизацию, анализ и экспериментальное исследование электрических характеристик объемного широкополосного режекторного стержневого эллиптического фильтра, способного при малых габаритах передавать сигналы в сотни ватт и более.

Теоретические исследования. Синтезируемый фильтр состоит из шести резонаторов. Три полосковых резонатора реализованы решеткой связанных стержней прямоугольного сечения. Внутри второго стержня размещены два коаксиальных резонатора с фторопластовым заполнением и центральными проводниками, соединенные с соседними стержнями перемычками, в третьем стержне – один. Стержни изолированы от корпуса, коаксиальные резонаторы и короткозамыкатели замкнуты. Конструкция размещена в металлическом корпусе с воздушным заполнением. Расстояния между стержнями выдержаны за счет направляющих, изготовленных из фторопласта, армированного стекловолокном. Материал стержней, центральных проводников, короткозамыкателей и корпуса – латунь посеребренная.

Разрабатываемый фильтр должен отвечать следующим требованиям: диапазон частот полосы заграждения (ПЗ) 0,97 – 1,97 ГГц, минимальное затухание в ПЗ не менее 30 дБ, максимальное затухание в полосе пропускания (ПП) не более 0,5 дБ, коэффициент стоячей волны по напряжению (КСВН) не более 1,6.

Проведен синтез фильтра по рабочим параметрам на основе эллиптического прототипа, выбранного из справочника по расчету фильтров [2]. Для расчета принята методика, основанная

на непосредственном переходе от низкочастотного прототипа к широкополосному режекторному стержневому эллиптическому фильтру с использованием преобразования Ричардса [1–4]. По величинам внешних последовательных шлейфов определяли отношение диаметров наружных и внутренних проводников коаксиальных резонаторов. По нормированным к полосе значениям собственных и взаимных «статических емкостей» с использованием графиков Гетзингера рассчитывали расстояния между стержнями и ширину стержней. В дальнейшем вышеупомянутый метод расчета будем называть расчетом «вручную». Получены следующие геометрические размеры фильтра (мм): длина стержней 50, коаксиальных резонаторов и их центральных проводников 35,4. Ширина стержней: первого 1,93, второго 7,58, третьего 4,95. Расстояния: крайних стержней до стенок корпуса 6,35, между первым и вторым стержнями 2,72, между вторым и третьим стержнями 1,32. Диаметр фторопластовых цилиндров: первого 2,59, второго 2,18, третьего 2,85. Диаметры центральных проводников коаксиальных резонаторов 1,32.

Параметры конструкции, рассчитанной «вручную», использованы в качестве исходных данных для построения 3D-модели при электромагнитном моделировании фильтра с помощью программы *HFSS* [5]. Программа *HFSS* обладает высокой точностью конечных результатов, но для проектирования микроволновых широкополосных режекторных стержневых фильтров СВЧ на связанных коаксиально-полосковых резонаторах ранее не применялась [4,5]. Внутренний объем фильтра и стержневые резонаторы прямоугольного сечения моделировали «примитивом» *Box*, т.е. задавали точку отсчета, их ширину, высоту и длину [5]. Коаксиальные резонаторы, их центральные проводники и цилиндрические короткозамыкатели моделировали «примитивом» *Cylinder*. Задавали центральную точку отсчета, их радиус и длину. Для объединения «примитивов» *Cylinder* при моделировании соединения центральных проводников использовали команду *Boolean-Unite* [5]. Диэлектрик, заполняющий фильтр, – воздух. Материал для модели стержней, центральных проводников и короткозамыкателей – серебро. Диэлектрическое заполнение коаксиальных резонаторов – фторопласт. Параметры моделирования: тип решения *Driven Terminal*. Портами (команда *Wave Port*) обозначены внешние границы коаксиального кабеля. Для расчета взята частота решения 1,5 ГГц (частота разбиения структуры на тетраэдры), максимальное число проходов 15, критерий остановки

адаптивного анализа 0,02, тип частотной развертки *Fast*, диапазон частот от 0,5 до 2,5 ГГц, число точек 500.

По результатам моделирования получены характеристики: амплитудно-частотная (АЧХ), КСВН, коэффициент отражения входа/выхода для вышеуказанного ЭФ. Диапазон частот ПЗ 0,9 – 1,76 ГГц, минимальное затухание в ПЗ 26,52 дБ, максимальное затухание в ПП 1,16 дБ. КСВН входа/выхода 1,32/1,31 с пиком 4,5/4,3 на частоте 2,0 ГГц, коэффициенты отражения входа/выхода 17/19 дБ.

Для параметрической оптимизации электрических характеристик использован оптимизационный модуль *HFSS Parametric* [5]. Линейные размеры фильтра задавали через геометрические переменные. Изменяли длину коаксиальных резонаторов от 24,5 до 39,5 мм при согласованном изменении длины цилиндрических короткозамыкателей. Дополнительно изменяли ширину второго и третьего стержней, расстояния перед третьим стержнем и до стенок корпуса, радиусы коаксиальных резонаторов, их внутренних проводников и цилиндрических короткозамыкателей.

Оптимальные результаты (мм) получены при длине стержней 50, коаксиальных резонаторов и центральных проводников: первого и третьего 29,5, второго 30. Ширина стержней: первого 1,37, второго 7,08, третьего 4,05. Расстояния: от первого стержня до стенок корпуса 6,35, от третьего стержня до стенок корпуса 6,27, между первым и вторым стержнями 2,72, между вторым и третьим стержнями 1,36. Диаметр фторопластовых цилиндров: первого 2,46, второго 1,98, третьего 2,78. Диаметр центральных проводников: первого и второго 1,2, третьего 1,4.

Рассчитанная с использованием имитационного моделирования АЧХ фильтра после оптимизации представлена на рисунке 1.

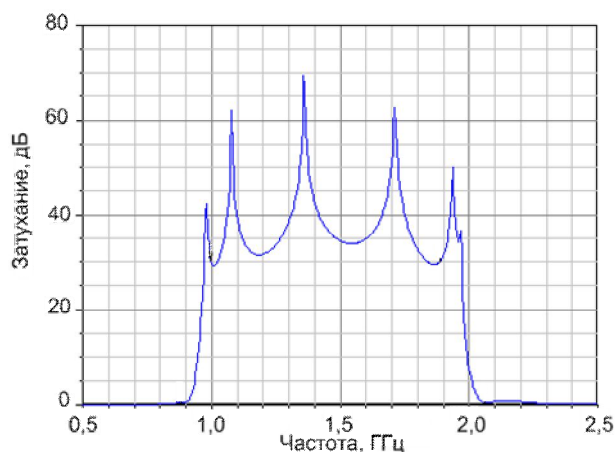


Рисунок 1 – АЧХ оптимизированной конструкции фильтра

Рассчитаны также КСВН входа/выхода, коэффициенты отражения входа/выхода. Сравнение электрических характеристик фильтра до и после оптимизации приведено в таблице 1.

Таблица 1– Сравнение электрических характеристик фильтра до и после параметрической оптимизации

Наименование	До оптимизации (по расчету «вручную»)	После оптимизации
Центральная частота, ГГц	1,33	1,47
Диапазон частот ПЗ, ГГц	0,9–1,76	0,97–1,97
Минимальное затухание в ПЗ, дБ	26,52	30,25
Максимальное затухание в ПП, дБ	1,16	0,5
Коэффициенты отражения входа/выхода, дБ	17/19	24/30
КСВН входа/выхода	1,32/1,31 с пиком 4,5/4,3 на частоте 2,0 ГГц	1,43/1,42 с пиком 2,1/2,0 на частоте 2,2 ГГц
Габариты фильтра, мм	31,2x60x12,7	29,2x60x12,7

Электрические характеристики ЭФ после оптимизации значительно лучше характеристик, полученных при моделировании конструкции, рассчитанной «вручную». После оптимизации диапазон частот ПЗ 0,97 – 1,97 ГГц, минимальное затухание в ПЗ 30,25 дБ, максимальное затухание в ПП не более 0,50 дБ, КСВН входа/выхода до 1,5, что соответствует техническому заданию. Рассчитаны также распределения напряженностей электрического и магнитного полей. Они позволяют судить о предельно-допустимой мощности, которую можно пропускать через фильтр, об искажении сигналов, об электрической прочности и других важных характеристиках фильтра. Используя картины распределений напряженностей электрического и магнитного полей, с помощью справочной литературы можно рассчитать электрическую прочность ЭФ. По полученным данным признаков электрического пробоя не выявлено.

Экспериментальное исследование

Выполнено экспериментальное исследование электрических характеристик лабораторного

макета исследуемого широкополосного режекторного стержневого ЭФ после оптимизации, в том числе АЧХ (рисунок 2, кривая 1) и КСВН (рисунок 2, кривые 2).

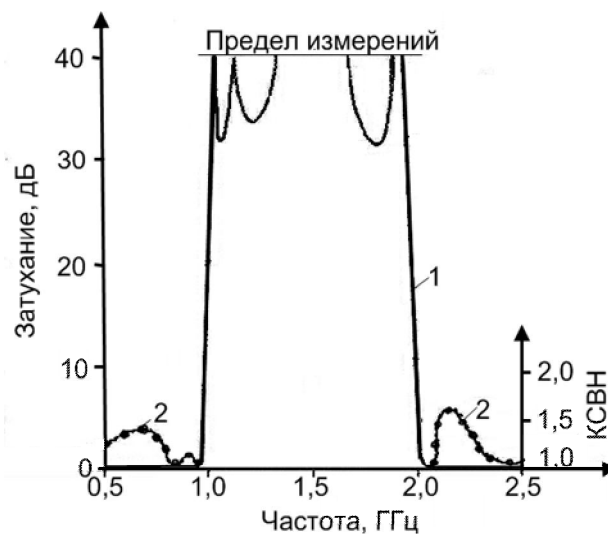


Рисунок 2 – Экспериментальные частотные характеристики лабораторного макета режекторного ЭФ после оптимизации

Сравнение результатов экспериментального исследования характеристик АЧХ и КСВН лабораторного макета режекторного стержневого ЭФ с результатами его моделирования представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение результатов моделирования режекторного стержневого ЭФ после оптимизации с экспериментальными данными

Наименование	Моделирование	Эксперимент
Центральная частота, ГГц	1,47	1,47
Диапазон частот ПЗ, ГГц	0,97–1,97	1–1,95
Минимальное затухание в ПЗ, дБ	31,25	31
Максимальное затухание в ПП, дБ	0,5	0,5
КСВН входа/выхода	1,43/1,42 с пиком 2,1/2,0 на частоте 2,0 ГГц	1,5 с пиком 1,6 на частоте 2,2 ГГц

Результаты экспериментального исследования лабораторного макета вышеуказанного режекторного ЭФ согласуются с результатами моделирования, что свидетельствует о правильности критериев, заложенных при разработке методов синтеза и алгоритмов моделирования.

Выводы. В результате анализа, моделирования и параметрической оптимизации спроек-

тирован микроволновый объемный широкополосный режекторный стержневой ЭФ с коаксиально-полосковыми резонаторами, удовлетворяющий техническому заданию. Полосковые резонаторы реализованы решеткой из трех связанных прямоугольных стержней, в двух из которых размещены три короткозамкнутых коаксиальных резонатора. Расчетная конструкция использована для создания 3D-модели ЭФ при компьютерном моделировании. Проведена параметрическая оптимизация электрических характеристик ЭФ, которая позволила изучить характер воздействий, оказываемых изменением размеров различных структурных элементов конструкции, на частотные характеристики устройства. Требуемых в техническом задании характеристик удалось достичь посредством согласованного изменения длин коаксиальных резонаторов и цилиндрических короткозамыкателей, а также ширины второго и третьего стержней, расстояний перед третьим стержнем и до стенки корпуса, радиусов коаксиальных резонаторов, их внутренних проводников и цилиндрических короткозамыкателей. Результаты экспериментального исследования лабораторного ма-

кета вышеназванного фильтра находятся в соответствии с результатами моделирования, что свидетельствует о правильности критериев, заложенных при разработке методов синтеза и алгоритмов моделирования. Рассчитано также распределение напряженностей электрического и магнитного полей в фильтре. Признаков электрического пробоя не выявлено.

Библиографический список

1. Матей, Д.Л. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи / Д.Л. Матей, А. Янг, Е. М. Т. Джонс. – М.: Связь, 1971. – Т. 1. – 439 с.; 1972. – Т. 2. – 495 с.
2. Зааль, Р. Справочник по расчету фильтров / Р. Зааль. – М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
3. Horton, V.C. The Digital Elliptic Filter - A Compact Sharp-Cut-Off Design for Wide Bandstop or Bandpass Requirements // IEEE Trans. - On MTT. – 1967. – Vol. MTT-15, № 5. – P. 307–314.
4. Hunter, I.C. Theory and Design of Microwave Filter/ I.C Hunter. – London: The Institute of Engineering and Technology, 2006. – 369 p.
5. Банков, С.Е. Проектирование СВЧ устройств и антенн с Ansoft HFSS / С.Е Банков, А.А. Курушин. – М.: ЗАО «РОДНИК», 2009. – 752 с.