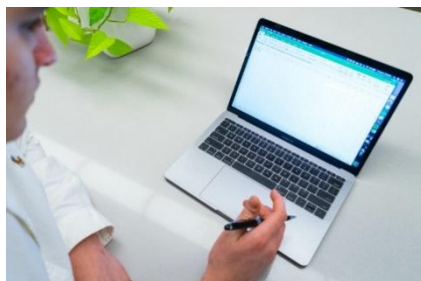


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

М.М. ЕСАКОВ

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ



Рязань 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

М.М. ЕСАКОВ

ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Рязань 2021

УДК 336.6:51(075.8)

Финансовые вычисления: учеб. пособие/ М.М. Есаков.; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2021. 188 с.

Рассмотрены основные алгоритмы финансовых и коммерческих вычислений. Показана логика наращения и дисконтирования, их применение при оценке денежных потоков. Рассмотрены вопросы практического применения финансовых и коммерческих вычислений в производственной деятельности, при осуществлении кредитных операций, при оценке капитальных финансовых активов и в страховании. Показаны основы принятия решений при наличии риска и в условиях неопределенности.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика», а также для преподавателей и студентов экономических специальностей вузов, аспирантов, практических работников финансовых организаций и финансовых подразделений коммерческих организаций.

Табл.5. Ил.20. Библиогр.:20 назв.

Денежные потоки, наращение, дисконтирование, кредитные операции, финансовый риск, капитальные финансовые активы

Рецензенты: кафедра ЭМОП Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой д-р. экон. наук, доцент Е.Н. Евдокимова);

канд. экон. наук, доцент, начальник кафедры экономики и менеджмента Академии ФСИН России Е.А. Буранова

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральными государственными стандартами третьего поколения и предназначено для изучения курса «Основы финансовых вычислений» студентами бакалавриата.

Цель учебного пособия заключается в подготовке студента к решению типовых задач, связанных с научно - исследовательской и производственной деятельностью в области экономики, финансов, бухгалтерского учета и коммерции на основе современных вычислительных технологий.

Учебное пособие дает возможность студентам подготовиться для дальнейшего изучения дисциплин: "Финансовый менеджмент", "Оценка стоимости бизнеса", "Инвестиции", "Корпоративные финансы", "Финансовый анализ и планирование", "Управление финансовыми рисками".

Учебное пособие помогает решить основные задачи дисциплины «Основы финансовых вычислений, в том числе:

- изучить методологические основы финансовой математики, в том числе понятия доходности финансовых операций, риска и изменения стоимости денег во времени;
- изучить методику финансовых расчетов на основе применения простых и сложных процентов;
- изучить методические приемы учета инфляции в финансовых расчетах;
- изучить разновидности денежных потоков и методику их оценки;
- изучить разновидности кредитных операций и основные вычислительные процедуры при их осуществлении;
- изучить эффективность кредитных операций с конвертацией валюты;
- изучить основные вычислительные финансовые операции при осуществлении производственной деятельности;
- изучить способы оценки доходности и риска при проведении финансовых операций, а также способы снижения риска;
- изучить методические подходы к принятию решений в условиях неопределенности.

Учебное пособие направлено на оказание помощи студентам при изучении дисциплины «Основы финансовых вычислений».

В результате освоения дисциплины студент **должен знать:**

- основные способы расчетов с использованием инструментальных

средств обработки экономических данных при решении финансовых, инвестиционных и коммерческих задач на предприятии; основные подходы к анализу и обоснованию полученных результатов;

- принципы построения стандартных теоретических и эконометрических моделей экономических процессов с использованием финансовых вычислений.

В результате освоения дисциплины студент **должен уметь:**

- использовать основные инструментальные средства обработки экономических данных при решении финансовых, инвестиционных и коммерческих задач на предприятии; основные подходы к анализу и обоснованию полученных результатов;

- строить стандартные теоретические и эконометрические модели экономических процессов и интерпретировать полученные результаты.

В результате изучения дисциплины «Основы финансовых вычислений» студент **должен владеть:**

- основными инструментальными средствами обработки экономических данных при решении финансовых, инвестиционных и коммерческих задач на предприятии; основными подходами к анализу и обоснованию полученных результатов;

- навыками построения стандартных теоретических и эконометрических моделей экономических процессов с использованием финансовых вычислений.

Учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций по курсу «Основы финансовых вычислений» для бакалавриата по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» в ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф.Уткина».

ГЛАВА 1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.1. Временная стоимость денег в финансовых и коммерческих расчетах

Фактор времени играет исключительно важную роль в финансовых и коммерческих расчетах. Необходимость учета фактора времени определяется неравноценностью денег, относящихся к разным моментам времени. Даже если предположить отсутствие инфляции и финансового и коммерческого риска, одна и та же сумма денег, полученная сегодня, не будет равноценна полученной, например, через год. Неравноценность определяется тем, что деньги обладают способностью приносить доход, только находясь в коммерческом обороте, и поэтому рациональный экономический агент не будет держать денежные средства в ликвидной форме, а постарается их инвестировать с целью получения дохода. Полученный доход, в свою очередь, также может быть reinvestирован. В связи с этим сегодняшняя сумма денежных средств является для экономического агента более ценной, чем та, которая будет получена через некоторое время.

Денежные средства, которые не будут инвестированы, будут иметь ценность меньшую, чем денежные средства, находящиеся в обороте и приносящие доход, так как они не смогут увеличить благосостояние своего владельца.

Это обстоятельство имеет решающее значение при принятии управленческих решений, особенно при осуществлении инвестиций. Денежные средства вкладываются обычно в реализацию инвестиционных проектов и в другие долгосрочные операции с целью извлекать доход в течение нескольких периодов. И в этом случае экономический агент сталкивается с фактом, что доходы, а возможно и расходы, будут относиться к разным периодам времени, а значит, они не будут равноценны.

В связи с этим неправомерным будет суммирование денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Такое суммирование является правильным лишь в тех случаях, когда учет времени не важен, например в бухгалтерском учете при формировании итогов по временным периодам и при осуществлении финансового контроля.

Фактор времени учитывается в финансовых и коммерческих расчетах посредством начисления процентов.

При принятии инвестиционных решений, при оценке источников финансирования, при долгосрочных финансовых и коммерческих операциях должны учитываться сроки платежей и потенциальные доходы и расходы, которые могли бы быть получены в случае, если бы платежи

осуществлялись в момент принятия управленческого решения. В таких случаях необходима оценка будущей стоимости денежных средств в момент осуществления платежа. Для такой оценки пользуются расчетами процентов.

Под процентами в финансовых расчетах понимается абсолютная величина дохода от предоставления денежных средств в долг, например в виде ссуды, продажи с отсрочкой платежа, депозита, учета векселя и др.

При заключении финансового соглашения стороны договариваются о размере процентной ставки – отношения суммы процента, выплачиваемой за определенный период времени, к размеру ссуды. Интервал времени, за который начисляются проценты, называется периодом начисления. Проценты измеряются в абсолютном выражении, процентные ставки – в виде десятичной или натуральной дроби.

Деньги, которые имеются в наличии сегодня, стоят для их владельца больше, чем такая же сумма в будущем. Изменение стоимости денег во времени можно объяснить, по крайней мере, тремя причинами. Во-первых, имеющуюся денежную сумму можно инвестировать, а значит, получить проценты, и денег в конце срока инвестирования станет больше. Во-вторых, покупательная способность денег может снизиться из-за инфляции. В-третьих, нельзя быть абсолютно уверенным, что инвестированная сумма будет получена в будущем.

Рассмотрим это на примере.

Предположим, что имеется 1 млн руб., которые можно вложить в банк под 10 % годовых. Следовательно, через год первоначальная сумма увеличится и будет составлять 1 млн 100 тыс. руб. Предположим, что определенная сумма вкладывается в производство некоторого товара, который реализуется с отсрочкой платежа покупателем на год. Размер платежа за реализованный товар составляет 1 млн руб. Допустим, что средняя годовая доходность составляет 10 %. Если бы денежные средства были выплачены без отсрочки, то предприятие, инвестируя деньги в банк, могло бы получить доход в размере 100 тыс. руб. При применении отсрочки дополнительного дохода у предприятия не будет. Отсюда следует, что одна и та же денежная сумма имеет неодинаковую ценность для их владельца. Через год предприятие в случае немедленной оплаты могло бы иметь 1 млн 100 тыс. руб., а при оплате с отсрочкой платежа – 1 млн руб. Значит, деньги сегодня стоят для их владельца дороже, чем через некоторый промежуток времени, так как он получит возможность инвестировать их позже, а следовательно, таким образом он ограничивает свое потенциальное потребление. В этом случае, при предоставлении отсрочки платежа, владелец денежных средств руково-

дствуется какими-то другими причинами. Например, покупатель очень важен с точки зрения перспектив ведения бизнеса и поэтому выгода образуется от продолжения сотрудничества и сохранения объемов сбыта.

Инвестирование – это всегда выбор между настоящим и будущим, между потреблением сегодня и, возможно, большим потреблением в будущем. Отказываясь от сегодняшнего потребления в пользу большего потребления в будущем, владелец денежных средств рискует. Инвестируя, владелец денежных средств всегда находится перед выбором, что имеет большую выгоду: извлечь потенциальный доход, рискуя получить в будущем потери в результате наступления неблагоприятной ситуации, или отказаться от получения дохода.

Предприятия в рыночных условиях имеют возможность передавать свои временно свободные средства третьим лицам на срок на условиях платности и возвратности, для того чтобы:

- 1) извлекать процентный, дисконтный или курсовой доход;
- 2) сохранять свои денежные средства от обесценения в результате инфляции.

Основными характеристиками любого процесса инвестирования являются:

- 1) первоначальная (номинальная или приведенная) сумма денежных средств (PV);
- 2) доходность (процентная ставка, ставка дисконтирования – r или учетная ставка – d);
- 3) промежуток времени (стандартный интервал) начисления дохода;
- 4) возвращаемая сумма (будущая стоимость) денежных средств (FV).

В зависимости от того, какие заданы характеристики процесса инвестирования, изменяются направления движения денежных потоков.

В дальнейшем при написании формул и в вычислениях будут использоваться именно эти обозначения.

1.2. Нарращение, дисконтирование и учет

Процесс вложения денежных средств, в котором заданы первоначальная сумма и процентная ставка, называется **наращением**. Возвращаемая сумма называется также наращенной суммой. Доход – это разность между возвращаемой и первоначальной суммой. Доходность операции характеризует процентная ставка.

Формула наращенная имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}PV + r \times PV &= FV, \\FV &= PV \times (1 + r).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Из (1.1) можно вывести формулу определения процентной ставки:

$$r = \frac{FV - PV}{PV} . \tag{1.2}$$

Процесс вложения денежных средств, в котором заданы возвращаемая сумма и процентная ставка, называется процессом математического дисконтирования. Инвестируемая сумма в данном случае называется **приведенной суммой**. Доходность операции характеризует процентная ставка, которая называется также ставкой дисконтирования.

Формула математического дисконтирования имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}PV + r \times PV &= FV, \\PV &= \frac{FV}{1+r}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Выражение $\frac{1}{1+r}$ называется коэффициентом дисконтирования.

От математического дисконтирования следует отличать банковское дисконтирование, которое используется при покупке (учете) денежных обязательств. Операция учета заключается в том, что покупатель, в качестве которого чаще всего выступает банк, до наступления срока платежа по обязательству, например по векселю, покупает его у владельца за сумму меньше той, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. покупает или, по – другому, учитывает его с дисконтом.

Для расчета дохода при операции учета применяется учетная ставка, которая обозначается, как мы показали выше, – d .

Учетная ставка находится по формуле:

$$d = \frac{FV - PV}{FV} . \tag{1.4}$$

Размер дисконта, удерживаемый покупателем обязательства, равен:

$$D = FV \times d . \tag{1.5}$$

Подставив в (1.5) d из (1.4) и сделав несложные преобразования получим:

$$PV = FV - D = FV - FV \times d = FV \times (1 - d) . \quad (1.6)$$

Множитель $(1 - d)$ называется дисконтным множителем.

При осуществлении финансовых расчетов существуют различные способы определения срока вложения денежных средств при расчетах процентного дохода и дохода при операциях учета, так называемые «банковские практики».

В зависимости от «банковской практики» расчета количества дней в финансовом периоде различают точные и обыкновенные процентные или учетные ставки. Описание «банковских практик» приведено в таблице 1.1.

Точные проценты и дисконты рассчитываются с учетом точного количества дней в календарном месяце или году. Обыкновенные проценты и дисконты рассчитываются с учетом приблизительного (округленного) количества дней в месяце или году.

Таблица 1.1 - Практика определения расчетного количества дней в финансовых периодах

Название банковских практик	Расчетное количество дней	
	В (финансовом) месяце	В (финансовом) году
Немецкая	30	360
Французская	По календарю	360
Английская	По календарю	По календарю

День вложения и изъятия денежных средств принимается за один день.

1.3. Нарращение с использованием простых процентов

Нарращение с использованием простых процентов означает, что инвестируемая денежная сумма ежегодно возрастает на одну и ту же величину равную, $PV \times r$.

Предположим, на счете находится сумма в размере 1000 руб., которая называется начальной суммой или приведенной стоимостью и обозначается PV . Рассчитаем будущую стоимость денежной суммы при условии, что на начальную сумму начисляются проценты в размере 10 % в год. Тогда по окончании первого года будут начислены проценты в размере 100 руб. (10 % от 1000 руб. или $0,1 \times 1000$ руб.). По окончании второго года будет также начислено 100 руб., так как простые проценты начисляются от начальной суммы. Всего за два года будет начислено 200 руб. процентов и возвращаемая сумма составит 1200 руб. (1000 руб. начальная сумма и проценты - $0,1 \times 1000$ руб. за первый год, $0,1 \times 1000$

руб. за второй год или $0,1 \times 2 \times 1000$ руб. за два года).

Размер возвращаемой денежной суммы через n лет можно определить по формуле:

$$FV = PV \times (1 + r \times n). \quad (1.7)$$

Множитель $(1 + r \times n)$ называется множителем наращения. Он показывает, во сколько раз возвращаемая сумма больше первоначальной суммы.

Увеличение процентной ставки или срока операции в k раз увеличивает множитель наращения в $\frac{(1 + k \times n \times r)}{(1 + n \times r)}$ раз.

Пример 1.1. Определить сумму процентов и возвращаемую сумму, если размер ссуды равен 1 млн руб., срок ссуды два года, процентная ставка 15 % годовых. Тогда сумма процентов составит $I = 1000 \times 2 \times 0,15 = 300$ тыс. руб., а возвращаемая сумма $FV = 1000 + 300 = 1300$ тыс. руб. При увеличении срока ссуды в два раза сумма процентов составит $I = 1000 \times 4 \times 0,15 = 600$ тыс. руб., т.е. увеличится в два раза, а возвращаемая сумма составит $FV = 1000 + 600 = 1600$ тыс. руб., т.е. увеличится в 1,23 раза.

Простые проценты чаще применяются в краткосрочных операциях (продолжительностью менее одного года) с однократным начислением процентов и реже в долгосрочных операциях.

При расчетах в краткосрочных операциях используется процентная ставка с учетом срока вложения денежных средств. Такую ставку называют промежуточной процентной ставкой. Формулу наращения с использованием простых процентов и промежуточной процентной ставки можно записать следующим образом:

$$FV = PV \times (1 + f \times r) \text{ или } FV = PV \times (1 + t \times \frac{r}{T}), \quad (1.8)$$

где $f = \frac{t}{T}$; t – срок, на который вкладываются денежные средства; T – расчетное количество дней в году с учетом применяемой банковской практики.

Пример 1.2. Определить возвращаемую сумму, если депозит в банке в размере 200 тыс. руб. открыт на 250 дней. Ставка процента составляет 7 % годовых. Применить английскую практику.

$$FV = 200 \times \left(1 + \frac{250}{365} \times 0,07\right) = 209,589 \text{ тыс. руб.}$$

В кредитных договорах могут предусматриваться процентные ставки, изменяющиеся в конкретные моменты времени.

Тогда формула расчета возвращаемой суммы принимает следующий вид:

$$FV = PV \times (1 + n_1 \times r_1 + n_2 \times r_2 + \dots + n_n \times r_n) = PV \times \left(1 + \sum_i n_i \times r_i\right), \quad (1.9)$$

где n_i – продолжительность периода начисления по ставке r_i .

Пример 1.3. Контракт, заключенный на 2,5 года, предусматривает начисление процентов в первый год в размере 15 %, затем каждые полгода ставка процента увеличивается на 0,5 %. Размер ссуды 2 млн руб. Определить возвращаемую сумму.

$$FV = 2000 \times (1 + 1 \times 0,15 + 0,5 \times 0,155 + 0,5 \times 0,16 + 0,5 \times 0,165) = 2775 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма, полученная в конце периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована. Причем процентная ставка может измениться. В случае многократного краткосрочного вложения в краткосрочные депозиты наращенная сумма для всего срока инвестирования может быть найдена по следующей формуле:

$$\begin{aligned} FV &= PV \times (1 + n_1 \times r_1) \times (1 + n_2 \times r_2) \times \dots \times (1 + n_n \times r_n) = \\ &= PV \times \prod_i (1 + n_i \times r_i). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Пример 1.4. 1 июня открыт депозит на один месяц на сумму 200 тыс. руб. под 8 % годовых. Определить возвращаемую сумму, если депозит возобновляется три раза. Применить английскую практику расчетов.

$$\begin{aligned} FV &= 200 \times \left(1 + \frac{30}{365} \times 0,08\right) \times \left(1 + \frac{31}{365} \times 0,08\right) \times \left(1 + \frac{31}{365} \times 0,08\right) = \\ &= 204,067 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

1.4. Дисконтирование и учет с использованием простых процентов

На практике часто приходится решать задачу обратную наращению, когда по заданной возвращаемой сумме FV требуется найти ис-

ходную сумму PV . Такой расчет называется дисконтированием. Величину PV , найденную дисконтированием, называют приведенной величиной (текущей или современной стоимостью) суммы FV .

Например, необходимо узнать, какую сумму надо инвестировать сегодня, чтобы получить через год 1000 руб. при процентной ставке равной 10 % годовых. Поскольку процентная ставка равна 10 % годовых, то каждый вложенный сегодня рубль даст доход в размере 0,1 руб. и в конце года общая сумма будет равна 1,1 руб. Тогда можно записать $PV \times 1,1 = 1000$ руб.

Отсюда, приведенная стоимость будет равна $PV = 1000 \text{ руб.} / 1,1 = 909,09$ руб.

Таким образом, если процентная ставка равна 10 % в год, то чтобы получить 1000 руб. через год, сегодня надо вложить 909,09 руб.

Проценты в виде разности $D = FV - PV$ называются дисконтом или скидкой с суммы FV . Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют учетом.

Например, имея на руках денежное обязательство, ну, скажем, вексель, его владелец хотел бы реализовать его раньше срока наступления платежа по обязательству. Если он предложит скидку или дисконт с суммы обязательства, то, вполне вероятно, найдется покупатель на это обязательство. Предположим, держатель обязательства предлагает дисконт в размере 10 % от суммы обязательства. Тогда сумма, которая будет выручена от продажи обязательства, будет составлять 90 % от номинальной суммы обязательства. То есть за каждый рубль обязательства при таких условиях можно будет получить 0,9 руб.

Таким образом, в практике используют три способа расчета дохода:

- на основе использования процесса наращения;
- на основе использования процесса дисконтирования;
- на основе использования процесса учета, устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

При математическом дисконтировании, когда известна возвращаемая сумма и нужно определить инвестируемую сумму, расчетная формула выглядит следующим образом:

$$PV = FV \times \frac{1}{1 + n \times r} . \quad (1.11)$$

Пример 1.5. Определить, какую сумму необходимо положить в банк на депозит, чтобы через три года можно было получить 250 тыс. руб. Ставка процента – 8 % годовых.

$$PV = \frac{250}{1 + 0,08 \times 3} = 201,613 \text{ тыс. руб.}$$

При операции учета простая годовая учетная ставка находится как

$$d = \frac{FV - PV}{FV \times n}. \quad (1.12)$$

Величину дисконта можно определить по формуле:

$$D = FV - PV = FV \times n \times d. \quad (1.13)$$

Тогда сумму, полученную владельцем финансового инструмента (векселя или другого денежного обязательства) при осуществлении операции учета, можно определить по следующей формуле:

$$PV = FV - D = FV - FV \times n \times d = FV \times (1 - n \times d). \quad (1.14)$$

Если срок до предъявления или погашения финансового инструмента составляет менее года, то используется промежуточная учетная ставка, которая рассчитывается аналогично промежуточной процентной ставке (1.8).

Пример 1.6. Определить, какую сумму получит векселедержатель при учете в банке векселя на сумму 1,5 млн руб. по учетной ставке 25 % за 150 дней до момента предъявления векселя (при расчетах использовать английскую практику).

$$PV = 1,5 \times \left(1 - \frac{150}{365} \times 0,25\right) = 1,346 \text{ млн руб.}$$

Учетная ставка может использоваться и для наращения. Расчетная формула выглядит следующим образом:

$$FV = PV \times \frac{1}{1 - n \times d}. \quad (1.15)$$

Если учитывается обязательство, когда на первоначальную сумму начисляются простые проценты, то для определения суммы, получаемой продавцом при учете, необходимо решить две задачи:

- 1) определить сумму долга на момент погашения обязательства;
- 2) определить сумму, получаемую продавцом обязательства при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга с использованием

учетной ставки, о которой договорились контрагенты.

Решение этих двух задач возможно в виде двух действий, описываемых одной формулой: наращением по ставке простых процентов, указанной в долговом обязательстве, и дисконтированием по учетной ставке, о величине которой договорились контрагенты:

$$FV = PV \times (1 + n_1 \times r) \times (1 - n_2 \times d), \quad (1.16)$$

где FV – сумма, которую получит первоначальный деожатель долгового обязательства, при его учете; n_1 – общий срок действия платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты; n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример 1.7. Переводный вексель на сумму 1,2 млн руб. с уплатой по нему 15 ноября выдан под 20 % годовых на 90 дней. Векселедержатель учел его в банке 20 сентября по учетной ставке 25 %. Определить полученную при учете сумму.

$$PV = 1200000 \times \left(1 + \frac{90}{365} \times 0,2\right) \times \left(1 - \frac{55}{365} \times 0,25\right) = 1210965,6 \text{ руб.}$$

В некоторых случаях требуется найти время, за которое первоначальная сумма при заданной процентной ставке вырастет до требуемой величины, или время, за которое дисконт достигнет заданной величины.

При наращении по простой процентной ставке r срок операции n можно определить по формуле:

$$n = \frac{FV - PV}{PV \times r}. \quad (1.17)$$

При использовании простой учетной ставки d срок операции определяется по формуле:

$$n = \frac{FV - PV}{FV \times d}. \quad (1.18)$$

Пример 1.8. Определить время, за которое долг в размере 800 тыс. руб. вырастет до 1,2 млн руб., если начисляются простые проценты по ставке 18 % годовых.

$$n = \frac{1,2 - 0,8}{0,8 \times 0,18} = 2,78 \text{ года.}$$

Уровень процентной ставки характеризует доходность операции и

может использоваться для сопоставления вариантов осуществления финансовых операций и выбора наиболее выгодных условий.

Величина простой процентной ставки r может быть определена по формуле:

$$r = \frac{FV - PV}{PV \times n}, \quad (1.19)$$

а простая учетная ставка d будет равна:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \times n}. \quad (1.20)$$

Напомним, что срок n в первом случае обозначает весь срок операции, а во втором – оставшийся срок от момента учета до погашения обязательства.

Пример 1.9. Определить доходность операции в виде простой процентной и простой учетной ставки, если ссуда размером 200 тыс. руб. выдана на три года и в соответствии с договором заемщик обязуется вернуть кредитору 300 тыс. руб.

$$r = \frac{300 - 200}{200 \times 3} = 0,1667 \text{ или } 16,67 \%;$$

$$d = \frac{300 - 200}{300 \times 3} = 0,1111 \text{ или } 11,11 \%.$$

Размер дисконта в контрактах может фиксироваться за весь срок ссуды в виде доли от возвращаемой суммы. Пусть FV - размер возвращаемой суммы, d_n - доля платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n . Определим, какие величины годовых ставок r и d могут обеспечить такие условия. Если FV - возвращаемая сумма в конце ссуды, то $PV = FV \times (1 - d_n)$ - это фактически выдаваемая сумма в момент заключения договора.

$$r = \frac{FV - PV}{PV \times n} = \frac{FV - FV \times (1 - d_n)}{FV \times (1 - d_n) \times n} = \frac{d_n}{(1 - d_n \times n)}, \quad (1.21)$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \times n} = \frac{FV - FV \times (1 - d_n)}{FV \times n} = \frac{d_n}{n}. \quad (1.22)$$

1.5. Переменная сумма счета и расчет процентов

Предположим, что в банке открывается счет и сумма денежных средств, хранящаяся на счете, часто изменяется. Для обеспечения текущего хозяйственного оборота часть денег снимается, а также делаются дополнительные взносы. В таких случаях при вычислении процентов часто используется методика на основе расчета процентных чисел. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число C_j за прошедший период j , в течение которого сумма на счете оставалась неизменной.

$$C_j = \frac{K_j \times t_j}{100}, \quad (1.23)$$

где t_j - длительность j -го периода в днях.

Сумма процентов, начисленная за весь расчетный срок, определяется как сумма процентных чисел, деленная на постоянное число D .

$$D = \frac{T}{r}, \quad (1.24)$$

где T - число дней в году; r - годовая ставка простых процентов (в %).

Пример 1.10

1 февраля был открыт счет до востребования. На счет была внесена сумма 30 000 руб., процентная ставка $r = 20\%$ годовых. Дополнительно 15 июля на счет была внесена сумма 5 000 руб., 1 октября со счета была снята сумма в размере 20 000 руб., а 20 ноября счет был закрыт. Определить сумму процентов и сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Будем использовать немецкую банковскую практику расчетов. За весь срок операции имеется три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной:

- 1) с 1 февраля по 15 июля ($K_1 = 30000$, $t_1 = 5 \times 30 + 15 = 165$);
- 2) с 15 июля по 1 октября ($K_2 = K_1 + I_1 = 30000 + 5000 = 35000$, $t_2 = 15 + 2 \times 30 + 1 = 76$);
- 3) с 1 октября по 20 ноября ($K_3 = K_2 + I_2 = 35000 - 20000 = 15000$, $t_3 = 30 + 20 = 50$).

Процентные числа будут равны:

$$C_1 = \frac{30000 \times 165}{100} = 49500,$$

$$C_2 = \frac{35000 \times 76}{100} = 26600,$$

$$C_3 = \frac{15000 \times 50}{100} = 7500.$$

Постоянный делитель равен $D = 360 / 20 = 18$.

Сумма процентов $R = \frac{49500 + 26600 + 7500}{18} = 4644$ руб. 44 коп.

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета $K_3 + R = 15000 + 4644,44 = 19644$ руб. 44 коп.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему одна и та же денежная сумма неравноценна в разные моменты времени?

2. Объясните, что такое проценты в финансовых вычислениях?

3. Что собой представляет процентная ставка?

4. Назовите основные характеристики процесса инвестирования.

5. Объясните, что такое процесс наращивания?

6. Объясните, что такое процесс математического дисконтирования?

7. Объясните, что такое учетная операция?

8. Объясните смысл промежуточной процентной ставки.

9. Объясните, в чем различие математического дисконтирования и учета.

10. Что из себя представляет процентное число?

11. Опишите методику вычисления процентов на основе процентных чисел.

12. Определите наращенную сумму с использованием немецкой, французской и английской практики, если инвестируемая сумма равна 250 тыс. руб., процентная ставка – 10 % годовых, период операции с 15 марта по 15 ноября, год високосный.

13. Найдите коэффициент наращивания за один год, если первоначальная процентная ставка равна 10 % годовых, и она уменьшается на один процент каждый квартал.

14. Найдите коэффициент наращивания за один год, если первоначальная ставка равна 10 % годовых и каждый квартал наращенная сумма инвестируется при уменьшении процентной ставки на один процент.

15. Найдите величину учетной ставки, если годовая процентная ставка равна 12 % годовых.

16. Найдите величину процентной ставки, если учетная ставка

равна 9 % годовых.

17. Определите какую сумму денежных средств необходимо разместить в банке под 6 % годовых, чтобы через четыре года иметь в распоряжении 500 тыс. руб.

18. Найдите, какую сумму получит векселедержатель при учете векселя номинальной стоимостью 2 млн руб. за 50 дней до его предъявления, если учетная ставка равна 12 % годовых.

19. Определите цену продажи процентного векселя номиналом 5 млн руб., на который начисляются проценты в размере 5 % годовых, если он будет продан за 50 дней до предъявления. Срок обращения векселя 180 дней. Покупатель хотел бы обеспечить себе доходность не ниже 8 % годовых.

20. Определите годовую доходность операции с процентным векселем для покупателя, если он его купит за 60 дней до предъявления за 1 млн 200 тыс. руб. Номинал векселя 1 млн 300 тыс. руб. Срок обращения 180 дней. На вексельную сумму начисляются простые проценты в размере 6 % годовых.

21. Определите, на какой срок необходимо разместить 300 тыс. руб. под 5 % годовых, чтобы в результате денежная сумма составила 320 тыс. руб.

22. Определите доходность операции в виде процентной и учетной ставки, если денежная сумма в размере 200 тыс. руб. размещена в виде займа на срок четыре года и по договору сумма, которая будет возвращена, составляет 250 тыс. руб.

23. Определите сумму начисленных процентов и сумму денежных средств на счете 26 июня. 1 марта на счет была внесена сумма 120 тыс. руб., 15 апреля была внесена денежная сумма в размере 250 тыс. руб., 20 мая со счета была списана сумма в размере 230 тыс. руб., 25 июня со счета была списана сумма в размере 25 тыс. руб. На остаток средств начисляются простые проценты в размере 3 % годовых. При решении использовать методику вычислений на основе процентных чисел.

ГЛАВА 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1. Нарращение с использованием сложных процентов

Нарращение по схеме сложных процентов означает, что очередной годовой доход исчисляется не с исходной величины инвестированного капитала, а с общей суммы, включающей также ранее начисленные и не востребованные инвестором проценты.

Покажем расчет возвращаемой суммы на примере. Предположим, имеется сумма 1000 руб., на которую начисляются проценты в размере 10 % годовых. По окончании первого года будущая стоимость денег будет равна 1000 руб. первоначального капитала и плюс проценты в размере 100 руб. (10 % от 1000 руб. или $0,1 \times 1000$). Следовательно, будущая стоимость денег будет равна 1100 руб. Определим будущую стоимость денег по окончании второго года. Так как проценты начисляются не только на первоначальную сумму, но и на ранее начисленные проценты, то за второй год сумма, полученная в виде процентов, будет равна $0,1 \times 1100$, т.е. 110 руб. Значит, к концу второго года будущая стоимость денег будет равна 1210 руб.

Для того, чтобы более точно представлять природу сложных процентов, разделим полученную будущую стоимость денег на три составляющие. Первая часть – это исходная сумма в размере 1000 руб., вторая часть – это проценты, начисленные за первый год в размере 100 руб. и за второй год также в размере 100 руб. Это простые проценты, начисленные на исходную сумму. Но есть еще проценты в размере 10 руб., начисленные на проценты в размере 100 руб., полученные в первом году. Проценты, начисленные на проценты, не востребованные ранее, называются сложными процентами. Общая сумма начисленных процентов (210 руб.) состоит из простых процентов (200 руб.) и сложных процентов (10 руб.).

Можно произвести расчеты и по другой схеме. Если умножить первоначальную сумму на коэффициент 1,1, а затем еще раз на 1,1, то мы получим будущую стоимость денег через два года:

$$FV = 1000 \text{руб.} \times 1,1 \times 1,1 = 1000 \text{руб.} \times 1,1^2 = 1210 \text{руб.}$$

Через пять лет будущая стоимость денег будет равна:

$$FV = 1000 \text{руб.} \times 1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times 1,1 = 1000 \text{руб.} \times 1,1^5 = 1610,51 \text{руб.}$$

Итак, через пять лет будущая стоимость 1000 руб. при ставке процента 10 % годовых составит 1610,51 руб. Общая сумма начисленных процентов составит 610,51 руб., из них 500 руб. будут простыми процентами, а 110,51 руб. – сложными.

Тогда размер инвестированного капитала через n лет можно определить по формуле:

$$FV = PV \times (1+r)^n. \quad (2.1)$$

Пример 2.1. Определить возвращаемую сумму, если ссуда в размере 400 тыс. руб. выдана на три года под 15 % годовых.

$$FV = 400 \times (1+0,15)^3 = 608,35 \text{ тыс. руб.}$$

Если сравнивать наращение с использованием простых и сложных процентов при одном и том же значении процентной ставки, то:

1) темпы наращения с использованием сложных процентов будут выше темпов наращения с использованием простых процентов, если период наращения превышает стандартный интервал (один год) начисления дохода;

2) темпы наращения с использованием сложных процентов будут меньше темпов наращения с использованием простых процентов, если период наращения меньше стандартного интервала (один год) начисления дохода.

Чаще всего областью применения сложных процентов являются долгосрочные операции (со сроком, превышающим год). При использовании сложных процентов может применяться внутригодовое начисление процентов.

В случае когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения будет иметь следующий вид:

$$FV = PV \times (1+r_1)^{n_1} \times (1+r_2)^{n_2} \times \dots \times (1+r_k)^{n_k}, \quad (2.2)$$

где r_k - годовая процентная ставка, действующая в интервале времени n_k .

Пример 2.2. Определить возвращаемую сумму, если заем выдан на пять лет, процентная ставка – 15 % первые три года и 14 % оставшиеся два года. Сумма займа 500 тыс. руб.

$$FV = 500 \times (1+0,15)^3 \times (1+0,14)^2 = 987,696 \text{ тыс. руб.}$$

При долгосрочных операциях, срок которых составляет дробное число лет, в вычислениях могут одновременно применяться и простые, и сложные проценты.

Начисление процентов при таких операциях возможно двумя способами:

1) начисление сложных процентов с дробным числом лет;

2) начисление процентов по смешанной схеме.

В первом случае вычисления ведутся по следующей формуле:

$$FV = PV \times (1+r)^{n+f}, \quad (2.3)$$

где: n – целая часть срока операции; f – дробная часть срока вложения средств.

Во втором случае расчеты ведутся по следующей формуле:

$$FV = PV \times (1+r)^n \times (1+r \times f), \quad (2.4)$$

где $f = \frac{t}{T}$; t – срок, на который вкладываются денежные средства; T – расчетное количество дней в году с учетом применяемой банковской практики.

Следует иметь в виду, что множитель наращения при применении смешанной схемы оказывается несколько больше, чем при начислении сложных процентов с дробным числом лет, так как для $n < 1$ справедливо соотношение $(1+n \times r) > (1+r)^n$.

Пример 2.3. Определить возвращаемую сумму двумя способами с использованием формул (2.3) и (2.4), если депозит в 200 тыс. руб. размещен на срок 2 года и три месяца, а годовая процентная ставка 12 %.

1) при начислении сложных процентов с дробным числом лет

$$FV = 200 \times (1+0,12)^{2,25} = 258,09 \text{ тыс. руб.};$$

2) при использовании смешанной схемы

$$FV = 200 \times (1+0,12)^2 \times \left(1 + \frac{3}{12} \times 0,12\right) = 258,41 \text{ тыс.руб.}$$

Во втором случае результат оказался больше. Однако для практических целей может использоваться как один, так и другой способ начисления процентов.

В целях оценки своих перспектив кредитору или должнику иногда важно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в определенное количество раз (N) при заданной процентной ставке. Для этого необходимо множитель наращения приравнять N . Тогда расчетные формулы будут выглядеть следующим образом:

- для случая начисления простых процентов

$(1 + r \times n) = N$, откуда

$$n = \frac{N-1}{r}; \quad (2.5)$$

- для случая начисления сложных процентов

$(1+r)^n = N$, откуда

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1+r)}. \quad (2.6)$$

Пример 2.4. Определить, через сколько лет величина депозита возрастет в три раза, если сумма депозита 200 тыс. руб. и ставка процента 15 % годовых для случая простых и сложных процентов:

1) для случая простых процентов $n = \frac{3-1}{0,15} = 13,33$ года;

2) для случая сложных процентов $n = \frac{\ln 3}{\ln(1+0,15)} = 7,86$ года.

Наиболее часто требуется определить, когда первоначальная сумма удвоится. Тогда формулы (2.5) и (2.6) принимают следующий вид:

- для простых процентов

$$n = \frac{1}{r}, \quad (2.7)$$

- для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}. \quad (2.8)$$

2.2. Внутригодовое начисление процентов

Обычной практикой является установление процентной ставки в виде годовой процентной ставки с начислением один раз или несколько раз в год. Если проценты начисляются несколько раз в год, то такая практика называется внутригодовым начислением процентов. В зависимости от количества начислений дохода (m) внутригодовое начисление может быть:

- 1) полугодовым ($m=2$);
- 2) поквартальным ($m=4$);
- 3) ежемесячным ($m=12$);
- 4) ежедневным ($m=365$ или 366);

5) непрерывным ($m=\infty$).

Предположим, что некоторая денежная сумма приносит доход в виде процентов по ставке $r=6\%$ годовых, начисляемых ежемесячно. Это означает, что проценты начисляются каждый месяц в размере $1/12$ от годовой процентной ставки r . Таким образом, реальная ставка процента составляет $1/12$ годовой процентной ставки или $0,005$ в десятичном исчислении.

Тогда будущая стоимость одного рубля в конце года будет составлять $FV = (1,005)^{12} = 1,06168$, то есть фактическая годовая ставка процента составляет $6,168\%$.

Формула наращения при дискретном, т.е. полугодовом, поквартальном, ежемесячном и ежедневном начислении сложных процентов, имеет следующий вид:

$$FV = PV \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}. \quad (2.9)$$

Пример 2.5. В банке размещен депозит в размере 400 тыс. руб. на три года под 8% годовых. Найти возвращаемую сумму при начислении процентов $1, 2, 4, 12$ раз в год.

1) при начислении процентов один раз в год
 $FV = 400 \times (1 + 0,08)^3 = 503,885$ тыс. руб.;

2) при начислении процентов два раза в год
 $FV = 400 \times \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{3 \times 2} = 506,128$ тыс. руб.;

3) при начислении процентов четыре раза в год
 $FV = 400 \times \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{3 \times 4} = 507,297$ тыс. руб.;

4) при начислении процентов двенадцать раз в год
 $FV = 400 \times \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{3 \times 12} = 508,095$ тыс. руб.

При одинаковой величине исходной суммы, одинаковом сроке вложения денежных средств и одинаковом значении годовой процентной ставки возвращаемая сумма оказывается больше в случае использования внутригодовых начислений, чем в случае начисления процентов один раз в год:

$$FV = PV \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} > FV = PV \times (1 + r)^n. \quad (2.10)$$

Как было показано выше, величина доходности, полученная при начислении процентов несколько раз в год, будет больше, чем величина доходности при начислении процентов один раз в год. Поэтому годовая процентная ставка для начисления сложных процентов, называемая номинальной, не отражает реальной эффективности финансовой операции. Процентная ставка, отражающая фактически полученный доход при осуществлении финансовой операции, получила название эффективной процентной ставки.

Номинальная и эффективная процентные ставки взаимосвязаны. На основании номинальной процентной ставки рассчитать эффективную процентную ставку (r_e).

Взяв за основу формулу наращения сложных процентов, можно получить формулу эффективной процентной ставки:

$$FV = PV \times (1 + r)^n,$$

отсюда

$$(1 + r_e) = \frac{FV}{PV}. \quad (2.11)$$

Используя формулу наращения сложных процентов с внутригодовыми начислениями ($FV = PV \times (1 + \frac{r}{m})^{nm}$), получаем формулу для вычисления эффективной процентной ставки:

$$(1 + r_e) = (1 + \frac{r}{m})^m$$

или

$$r_e = (1 + \frac{r}{m})^m - 1, \quad (2.12)$$

где r_e – эффективная процентная ставка; r – номинальная процентная ставка; m – количество внутригодовых выплат.

Величина эффективной процентной ставки зависит от количества внутригодовых начислений процентов (m). При начислении процентов один раз в год номинальная и эффективная процентные ставки равны. Чем больше количество внутригодовых начислений процентов, тем больше эффективная процентная ставка.

Пример 2.6. Определить величину эффективной процентной ставки, если номинальная процентная ставка 15 % годовых, а проценты начисляются 2, 4 и 12 раз в год:

1) при начислении процентов два раза в год

$$r_e = \left(1 + \frac{0,15}{2}\right)^2 - 1 = 0,1556 \text{ или } 15,56 \%;$$

2) при начислении процентов четыре раза в год

$$r_e = \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1 = 0,1586 \text{ или } 15,86 \%;$$

3) при начислении процентов двенадцать раз в год

$$r_e = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1607 \text{ или } 16,07 \%.$$

2.3. Дисконтирование и учет на основе сложных процентов

Расчет приведенной стоимости называется дисконтированием, а процентную ставку, которую используют в расчетах, называют дисконтной ставкой или ставкой дисконтирования.

Как уже отмечалось, математическое дисконтирование отличается от дисконтирования при учете обязательств и в розничной торговле при установлении цены. При учете обязательств дисконтирование – это скидка с номинальной стоимости обязательства, а в розничной торговле скидка с цены для увеличения объема продаж.

Формула математического дисконтирования выглядит следующим образом:

$$PV = FV \times \frac{1}{(1+r)^n} = FV \times v^n, \quad (2.13)$$

где $v^n = \frac{1}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n}$ - дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в год, то расчетная формула будет иметь следующий вид:

$$PV = FV \times \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n}} = FV \times v^{m \times n}. \quad (2.14)$$

Величину PV , полученную дисконтированием FV , называют современной, текущей стоимостью, или приведенной величиной FV . Суммы PV и FV эквивалентны, так как платеж в сумме FV через n лет равноценен сумме PV , выплачиваемой в настоящий момент.

Пример 2.7. Определить, какую сумму нужно положить в банк на депозит, чтобы через три года на счете оказалась сумма в 300 тыс. руб. На первоначальную сумму начисляются сложные проценты в размере

8 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально.

$$PV = 300 \times \frac{1}{\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{3 \times 4}} = 236,548 \text{ тыс. руб.}$$

В банковском учете используется сложная учетная ставка. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$PV = FV \times (1 - d)^n. \quad (2.15)$$

Величина дисконта вычисляется по формуле:

$$D = FV - PV = FV - FV \times (1 - d)^n = FV \times [(1 - d)^n]. \quad (2.16)$$

Пример 2.8. Определить? какую сумму получит держатель векселя номинальной стоимостью 2,5 млн руб. при его учете в банке за два года до наступления срока платежа, если банк готов учесть вексель по учетной ставке 30 %.

$$PV = 2,5 \times (1 - 0,3)^2 = 1,225 \text{ млн руб.}$$

При учете несколько раз в год используется учетная ставка d . Процесс дисконтирования в этом случае происходит с прогрессирующим уменьшением величины дисконта. Причем чем больше m , тем величина дисконта снижается быстрее.

Процесс дисконтирования по сложной учетной ставке m раз в год описывается формулой:

$$PV = FV \times \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{n \times m}. \quad (2.17)$$

При одинаковой величине исходной суммы, одинаковом сроке вложения денежных средств и значении годовой учетной ставки приведенная сумма оказывается меньше в случае использования внутригодовых начислений, чем в случае учета один раз в год по сложной учетной ставке:

$$PV = FV \times \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{nm} \langle PV = FV \times (1 - d)^n. \quad (2.18)$$

Если доходность, полученную при использовании внутригодовых начислений, выразить в процентах, то полученная учетная ставка окажется ниже учетной ставки при учете один раз в год.

Поэтому номинальная годовая учетная ставка не отражает реальной эффективности сделки. Учетная ставка, отражающая фактическую

эффективность операции учета, называется эффективной и обозначается d_e .

Номинальная и эффективная учетные ставки являются взаимосвязанными. Для каждой номинальной учетной ставки можно рассчитать эффективную учетную ставку.

Под эффективной учетной ставкой понимают сложную годовую учетную ставку, отражающую фактическую эффективность операции учета.

Эффективная учетная ставка определяется из соотношения

$$\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \times n} = (1 - d_e), \text{ из которого следует, что}$$

$$d_e = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m. \quad (2.19)$$

Пример 2.9. Определить эффективную учетную ставку, если номинальная учетная ставка равна 25 %, а учет осуществляется четыре раза в год.

$$d_e = 1 - \left(1 - \frac{0,25}{4}\right)^4 = 0.2275 \text{ или } 22,75 \, \%.$$

Эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной учетной ставки.

Наращение по сложной учетной ставке является задачей, обратной дисконтированию.

При учете один раз в год

$$FV = PV \times \frac{1}{(1 - d)^n}, \quad (2.20)$$

а при учете m раз в год

$$FV = PV \times \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{n \times m}}. \quad (2.21)$$

2.4. Непрерывное начисление процентов

В некоторых случаях при принятии управленческих решений определяется наращенная или дисконтированная сумма с использованием непрерывного начисления процентов.

Наращенная сумма при непрерывном начислении процентов рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
F_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} PV \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} = PV \times \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m\right]^n, \\
\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{nm}\right)^m &= e^r \text{ тогда } F_n = PV \times e^{rn}, \\
F_n &= PV \times e^{\delta \times n}, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

где e^δ – множитель наращения, δ – специальное обозначение процентной ставки при непрерывном начислении процентов (непрерывная процентная ставка или «сила роста»).

Сила роста δ представляет собой номинальную процентную ставку при $m \rightarrow \infty$.

Дисконтирование при непрерывном начислении процентов осуществляется по формуле:

$$PV = FV \times e^{-\delta \times n}. \tag{2.23}$$

Силу роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени:

$$FV(t) = PV \times e^{\delta \times t} \times \delta = FV(t) \times \delta \tag{2.24}$$

или

$$\frac{dFV(t)}{FV(t)} = \delta \times dt. \tag{2.25}$$

Пусть сила роста изменяется во времени в виде непрерывной функции времени, тогда $FV(t)$ может быть получено как решение дифференциального уравнения (2.27). Тогда наращенная и приведенная стоимости определяются соответственно:

$$FV = PV \times e^{\int_0^n \delta dt}; \quad PV = FV \times e^{-\int_0^n \delta dt}. \tag{2.26}$$

В случае если сила роста - линейная функция от времени с постоянным приростом $\delta_t = \delta_0 + a \times t$, то:

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta_0 + a \times t) dt = \delta_0 \times n + \frac{a \times n^2}{2}, \tag{2.27}$$

а множитель наращения будет равен:

$$q = e^{\delta_0 \times n + \frac{a \times n^2}{2}}. \tag{2.28}$$

В случае если сила роста - экспоненциальная функция времени $\delta_t = \delta_0 \times a^t$, то:

$$\int_0^n \delta_t dt = \frac{\delta_0}{\ln a} \times (a^n - 1), \quad (2,29)$$

а множитель наращения будет равен:

$$q = e^{\frac{\delta_0}{\ln a} \times (a^n - 1)}. \quad (2.30)$$

Пример 2.10. Начальный уровень роста равен 10 %. Определить множитель наращения, если: а) сила роста непрерывно увеличивается линейно с приростом 2 % в год; б) сила роста непрерывно увеличивается по экспоненте с годовым приростом 2 %. Срок наращения 5 лет.

а) найдем показатель степени множителя наращения

$$0,1 \times 5 + \frac{0,02 \times 5^2}{2} = 0,75, \text{ тогда}$$

$$q = e^{0,75} = 2,117;$$

б) найдем показатель степени множителя наращения

$$\frac{0,1}{\ln 1,02} \times (1,02^5 - 1) = 0,52566, \text{ тогда}$$

$$q = e^{0,53} = 1,699.$$

2.5. Определение срока платежа и величины процентной

ставки

В ряде практических задач начальная (PV) и конечная (FV) суммы задаются контрактом и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая может использоваться для сравнения с рыночными показателями, а также показывает эффективность финансовой операции.

Определение продолжительности финансовой операции осуществляется следующим образом:

- при наращении по сложной годовой ставке r . Из исходной формулы наращения $FV = PV \times (1 + r)^n$ следует, что

$$n = \frac{\log(\frac{FV}{PV})}{\log(1+r)}, \quad (2.31)$$

где логарифм можно взять по любому основанию;

- при наращении по номинальной ставке процентов m раз в году из уравнения $FV = PV \times (1 + \frac{r}{m})^{m \times n}$ получим:

$$n = \frac{\log(\frac{FV}{PV})}{m \times \log(1 + \frac{r}{m})}; \quad (2.32)$$

- при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d из уравнения $PV = FV \times (1 - d)^n$ получим:

$$n = \frac{\log(\frac{PV}{FV})}{\log(1 - d)}; \quad (2.33)$$

- при дисконтировании по номинальной годовой учетной ставке m раз в году из уравнения $PV = FV \times (1 - \frac{d}{m})^{m \times n}$ получим:

$$n = \frac{\log(\frac{PV}{FV})}{m \times \log(1 - \frac{d}{m})}; \quad (2.34)$$

- при наращении по постоянной силе роста из уравнения $FV = PV \times e^{\delta}$ получим:

$$\delta = \ln(\frac{FV}{PV}). \quad (2.35)$$

Пример 2.11. Определить продолжительность периода, за который первоначальная сумма в 200 тыс. руб. возрастет в 2,5 раза при процентной ставке 12 % годовых при начислении сложных процентов один раз в год и четыре раза в год:

- при начислении процентов один раз в год $n = \frac{\ln \frac{500}{200}}{\ln(1+0,12)} = 8,09$

года;

- при начислении процентов четыре раза в год

$$n = \frac{\ln \frac{500}{200}}{4 \times \ln(1 + \frac{0,12}{4})} = 7,75 \text{ года.}$$

Аналогично можно получить величину процентных и учетных ставок:

- при наращении по сложной годовой ставке r . Из исходной формулы наращения $FV = PV \times (1+r)^n$ следует, что

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1; \quad (2.36)$$

- при наращении по номинальной ставке процентов m раз в году из уравнения $FV = PV \times (1 + \frac{r}{m})^{m \times n}$ получим:

$$r = (\sqrt[m \times n]{\frac{FV}{PV}} - 1) \times m; \quad (2.37)$$

- при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d из уравнения $PV = FV \times (1-d)^n$ получим:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}}; \quad (2.38)$$

- при дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году из уравнения $PV = FV \times (1 - \frac{d}{m})^{m \times n}$ получим:

$$d = (1 - \sqrt[m \times n]{\frac{PV}{FV}}) \times m. \quad (2.39)$$

Пример 2.12. Определить величину процентной ставки, при которой первоначальная сумма в 200 тыс. руб. возрастет в 2,5 раза за пять

лет при начислении сложных процентов один раз в год и четыре раза в год:

$$\text{ - при начислении процентов один раз в год } r = \sqrt[5]{\frac{500}{200}} - 1 = 0,2011$$

или 20,11 %;

$$\text{ - при начислении процентов четыре раза в год } r = \left(\sqrt[4 \times 5]{\frac{500}{200}} - 1 \right) \times 4 = 0,1875 \text{ или } 18,75 \, \%.$$

2.6. Учет инфляции при наращении и дисконтировании

Норма доходности не является постоянной величиной и зависит от риска, связанного с вложением денежных средств. Чем выше риск вложений, тем больше норма доходности, и наоборот.

Одной из проблем, которую необходимо учитывать с целью снижения рисков, является проблема роста цен. Для достоверного сравнения экономических показателей в различные периоды времени необходимо, чтобы цены на товары и услуги корректировались с учетом уровня инфляции.

На практике различают номинальные цены, т.е. цены в том виде, как они указаны на ценниках товаров и услуг, и реальные цены, которые отражают покупательную способность денег.

Точно так же различают номинальные (денежные) и реальные процентные ставки.

Предположим, инвестор хотел бы вложить 1000 д.е. так, чтобы его капитал каждый год увеличивался на 10 %. Вкладывая 1000 д.е. он ожидает получить через год 1100 д.е., тогда покупательная способность его денег будет выше на 10 %, так как через год он сможет купить товаров на 10 % больше. Значит, реальная ставка дохода будет равна $r = 10 \, \%$.

Предположим, что темп инфляции $r_p = 5 \, \%$. Поэтому, если инвестор хочет получить реальную доходность (r) в размере 10 % он должен защитить свои вложения от инфляции. Для этого доход в денежном выражении должен быть выше, чем первоначальный. Во-первых, потребуется 50 д.е. $= 1000 \times 0,05$ для защиты инвестиций и, во-вторых, - 5 д.е. $= 100 \times 0,05$ для защиты реального дохода. Таким образом, фактическая сумма денежных средств, которую инвестор должен получить через год, должна составить 1155 д.е. Тогда доходность, измеряемая денежной или номинальной ставкой (r_m), составит 15,5 %, а доход должен составить 155 д.е. на 1000 д.е. инвестиций.

Общая формула, отображающая соотношение реальной ставки до-

ходности, номинальной процентной ставки и темпа инфляции, выводится из равенства $1+r = \frac{1+r_m}{1+r_p}$ и имеет следующий вид:

$$r = \frac{1+r_m}{1+r_p} - 1 = \frac{r_m - r_p}{1+r_p} . \quad (2.40)$$

Темп инфляции равен:

$$r_p = \frac{S_p - S_0}{S_0} , \quad (2.41)$$

где: S_0 - сумма денежных средств, для которой рассматривается покупательная способность без инфляции; S_p - сумма денежных средств, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции.

$$S_p = S_0 \times (1+r_p) . \quad (2.42)$$

Величину $I_p = (1+r_p)$ называют индексом инфляции.

В случае если период начисления процентов n превышает год, то общий индекс инфляции $I_{p\Sigma}$ определяется как произведение годовых индексов инфляции I_{pi} за период начисления процентов:

$$I_{p\Sigma} = \prod_{i=1}^n I_{pi} . \quad (2.43)$$

Когда индекс инфляции задан за период начисления процентов n , превышающий год и равный целому числу лет, в случае, если темп инфляции по годам не изменяется, годовой индекс инфляции может быть определен по формуле:

$$I_p = \sqrt[n]{I_{p\Sigma}} . \quad (2.44)$$

Если период начисления процентов меньше года, то индекс инфляции за период начисления процентов может быть определен по формуле:

$$I_{ph} = \sqrt[h]{I_p} , h = \frac{T}{t} , \quad (2.45)$$

где T - число дней в году в соответствии с применяемой банковской

практикой; t – период начисления процентов; I_p - годовой индекс инфляции.

Инфляционное обесценение денег в случае схемы простых процентов учитывается следующим образом.

Пусть уровень инфляции за период n равен r_p . Тогда:

$$FV = PV \times (1 + n \times r) \times (1 + r_p) \text{ или } FV = PV \times (1 + n \times r_m). \quad (2.46)$$

Так как $PV \times (1 + n \times r) \times (1 + r_p) = PV \times (1 + n \times r_m)$, то после несложных преобразований получим $n \times r + r_p + n \times r \times r_p = n \times r_m$.

Отсюда:

$$r_m = \frac{n \times r + r_p + n \times r \times r_p}{n}. \quad (2.47)$$

Именно под такую простую ставку ссудных процентов нужно разместить первоначальную сумму на срок n , чтобы при уровне инфляции r_p за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде годовой процентной ставки r .

Пример 2.13. Определить, под какую годовую денежную (номинальную) ставку процента необходимо разместить денежную сумму на пять месяцев, чтобы обеспечить реальную годовую доходность 15 %, если темп инфляции в месяц составляет 1,5 %. При расчетах использовать немецкую практику.

Индекс инфляции за пять месяцев составит $I_p = (1 + 0,015)^5 = 1,077$.

Темп инфляции за пять месяцев составит $r_p = 0,077$ или 7,7 %.

Денежная (номинальная) ставка процента составит

$$r_m = \frac{\frac{150}{360} \times 0,15 + 0,077 + \frac{150}{360} \times 0,15 \times 0,077}{\frac{150}{360}} = 0,346 \text{ или } 34,6 \, \%.$$

Если $n=1$, то $r_m = r + r_p + r \times r_p$. Это соотношение называется формулой Фишера, а величина $r_p + r \times r_p$ называется инфляционной премией.

Если из (2.47) выразить r , то получим формулу реальной доход-

ности:

$$r = \frac{n \times r_m - r_p}{n + n \times r_p} . \quad (2.48)$$

Пример 2.14. Определить реальную стоимость возвращаемой суммы, если в банке размещена денежная сумма 400 тыс. руб. под 12 % годовых на три месяца. Прогнозируется годовой темп инфляции 6 %. При расчетах использовать немецкую практику.

Индекс инфляции за год составит $I_p = 1,06$.

Индекс инфляции за три месяца составит $h = \frac{360}{90} = 4$;

$$I_{p3} = \sqrt[4]{1,06} = 1,015 .$$

Темп инфляции за три месяца составит $r_p = 0,015$ или 1,5 %.

Реальная	годовая	доходность	составит
$\frac{90}{360} \times 0,12 - 0,015$			
$r = \frac{\frac{90}{360} \times 0,12 - 0,015}{\frac{90}{360} + \frac{90}{360} \times 0,015} = 0,059 .$			

Реальная	стоимость	возвращаемой	суммы	составит
$FV = 400 \times (1 + \frac{90}{360} \times 0,059) = 405,9 \text{ тыс. руб.}$				

Инфляционное обесценение денег в случае использования сложных процентов учитывается следующим образом:

$$FV = PV \times (1+r)^n \times (1+r_p) . \quad (2.49)$$

Так как $PV \times (1+r)^n \times (1+r_p) = PV \times (1+r_m)^n$, то

$$(1+r)^n \times (1+r_p) = (1+r_m) . \quad \text{Преобразуя дальше, получаем}$$

$$(1+r) \times \sqrt[n]{1+r_p} = 1+r_m .$$

Тогда

$$r_m = (1+r) \times \sqrt[n]{1+r_p} - 1 . \quad (2.50)$$

Именно под такую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму на срок n , чтобы при уровне инфляции

r_p за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде сложной годовой ставки r . Если из (2.50) выразить r , то получим формулу реальной доходности в виде сложной годовой ставки ссудных процентов:

$$r = \frac{1 + r_m}{\sqrt[n]{1 + r_p}} - 1. \quad (2.51)$$

Пример 2.15. Определить, какую сумму необходимо положить в банк, чтобы обеспечить реальную годовую доходность 12 %. Инвестор хотел бы иметь через 2,5 года на счете денежную сумму в размере 500 тыс. руб. Темп инфляции прогнозируется в первый год 7 %, во второй год 6 % и в третий год 5 %. При расчетах использовать немецкую практику.

Индекс инфляции за расчетный период составит

$$I_p = I_{p1} \times I_{p2} \times \sqrt{I_{p3}} = 1,07 \times 1,06 \times \sqrt{1,05} = 1,1622.$$

Темп инфляции за расчетный период составит $r_p = 0,1622$.

Денежная (номинальная) годовая ставка процента составит

$$r_m = (1 + 0,12) \times \sqrt[2,5]{1 + 0,1622} - 1 = 0,189.$$

На счет необходимо внести денежную сумму в размере

$$PV = \frac{500}{(1 + 0,189)^{2,5}} = 324,351 \text{ тыс. руб.}$$

Для облегчения расчетов наращенных и дисконтированных сумм составлены таблицы соответственно мультиплицирующих и дисконтирующих множителей.

Мультиплицирующий множитель $FM_1(n, r)$ показывает, во сколько раз увеличится сумма, вложенная на n лет под r процентов годовых, т.е. характеризует будущую стоимость одной денежной единицы на конец периода:

$$FM_1(n, r) = (1 + r)^n. \quad (2.52)$$

Дисконтирующий множитель $FM_2(n, r)$ показывает, какую долю от наращенной суммы составит начальная сумма, вложенная на n лет под r процентов годовых, к концу n -го года, т.е. характеризует приведенную стоимость одной денежной единицы, ожидаемой к получению через n периодов:

$$FM_2(n, r) = \frac{1}{FM_1(n, r)} = \frac{1}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n}. \quad (2.53)$$

Эта величина называется приведенной (текущей, временной) стоимостью одной денежной единицы, вложенной на n лет под r процентов годовых. С ее помощью можно привести в соответствие вложенную и возвращаемую суммы.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, чем различаются схемы простых и сложных процентов.

2. Какой множитель наращенения, на основе простых или сложных процентов, будет больше, если период наращенения больше одного года?

3. Покажите способы начисления процентов при долгосрочных операциях, если их срок составляет дробное количество лет.

4. Сравните наращение по простой и сложной ставке процента.

5. Объясните, что такое эффективная процентная ставка.

6. Объясните, что такое "сила роста".

7. Выведите формулу Фишера.

8. Первоначальная сумма равна 150 тыс. руб. Найдите наращенную сумму, если срок операции 3 года и применяется сложная годовая процентная ставка в размере 9 %.

9. Годовая номинальная процентная ставка равна 12 %, начисление процентов ежеквартальное. Найдите эффективную процентную ставку.

10. Найдите современную стоимость возвращаемой суммы в размере 200 тыс. руб., если срок операции 4 года, а годовая процентная ставка – 8 %.

11. Найдите эффективную учетную ставку, если годовая номинальная учетная ставка равна 18 %, учет производится ежемесячно.

12. Вклад в размере 15 тыс. руб. размещен в депозит 10 октября под сложную процентную ставку в размере 8 % годовых. Какую сумму получит вкладчик 20 сентября через два года?

13. Определите, за какой срок сумма в 75 тыс. руб. увеличится в полтора раза, если ее разместить в банк под 8 % годовых.

14. Определите какую сумму получит держатель векселя в размере 3 млн руб. со сроком обращения 5 лет, на который начисляются сложные проценты в размере 7 % годовых, если банк готов учесть его за два года до предъявления по сложной учетной ставке 9 % годовых.

15. Определите продолжительность периода, за который денежная сумма в 300 тыс. руб. возрастет в 1,7 раза, если применяется сложная годовая процентная ставка в размере 8 %. Начисление процентов осу-

ществляется ежеквартально.

16. Определите процентную ставку, которая позволит за два года увеличить денежную сумму в 1,2 раза при начислении процентов один раз в год и четыре раза в год.

17. Определите темп инфляции за пять лет, если годовой темп инфляции ростоянный и равен 3 %.

18. Определите темп инфляции за три года, если годовые темпы инфляции равны соответственно: в первый год – 5 %, во второй год – 4 % и в третий год – 3 %.

19. Определите темп инфляции за месяц, если годовой темп инфляции равен 7 % и в течение года инфляция равномерная.

20. Вычислите годовую реальную ставку процента, если простая годовая номинальная ставка процента равна 12 %, темп инфляции за период операции составляет 14 %, период проведения операции 3 года.

21. Определите реальную годовую процентную ставку, если сложная денежная годовая процентная ставка равна 15 %, инфляция за год равна 7 %, длительность операции шесть месяцев.

22. Определите денежную (номинальную) годовую процентную ставку, если простая реальная годовая процентная ставка равна 3 %, инфляция за год составила 8 %, длительность операции три месяца.

23. Определите, стоит ли размещать 300 тыс. руб. под сложную годовую номинальную ставку процента в размере 6,5 % на четыре года, если темп инфляции прогнозируется по годам 6 %, 5 %, 4 % и 3 % соответственно. Вкладчик хотел бы, чтобы его благосостояние за этот период реально выросло бы на 3 %.

ГЛАВА 3. КОНВЕРТАЦИЯ ВАЛЮТЫ И НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ

3.1. Конвертация валюты и начисление простых процентов

Эффективность финансовых операций можно повысить, если совмещать открытие депозита с конвертацией валюты. В этом случае при благоприятном для инвестора соотношении процентных ставок по рублевым и валютным депозитам и соотношению курса в начале и в конце операции доходность операции можно повысить по сравнению с размещением обычного депозита.

Предположим, что инвестор имеет две альтернативные возможности инвестирования 100 000 рублей. Первая возможность – размещение денежной суммы в рублевый депозит под 6 % годовых, вторая возможность – размещение денежной суммы в валютный депозит в долларах под 3,5 % годовых. Какой вариант является более предпочтительным для инвестора?

Использование того или иного варианта инвестирования зависит от величины изменения валютного курса. Например, если валютный курс в настоящее время составляет 63,5 руб. за доллар, то 100 000 руб. эквивалентны 1 574 долларам 80 центам. Открыв депозит в рублях, через год инвестор получит 106 000 руб. ($100\,000 \text{ руб.} \times 1,06$), что эквивалентно сумме 1 669, 29 долл. Открыв депозит в долларах, через год инвестор будет иметь 1 629 долларов 92 цента ($1574,8 \text{ долл.} \times 1,035$).

Если валютный курс в конце года составит 64,5 руб. за доллар, то при открытии рублевого депозита в конце года 1 629,92 долл. будут эквивалентны 105 129, 84 руб., а если валютный курс составит 65,5 руб. за долл., то 1 629,92 долл. будут эквивалентны 106 759,76 руб.

Равновесный валютный курс, когда открытие рублевого депозита под 6 % годовых будет равновыгодно открытию валютного депозита под 3,5 % годовых, будет равен 65,03 руб. за долл. ($106\,000 \text{ руб.} / 1\,629,92 \text{ долл.}$). Отсюда можно сделать вывод, что если валютный курс будет равен 64,5 руб. за долл., то выгоднее открыть рублевый депозит под 6 % годовых, а если валютный курс будет равен 65,5 руб. за долл., то выгоднее открыть валютный депозит под 3,5 % годовых.

В примере, приведенном выше, денежными средствами, которыми располагает инвестор, является денежная сумма в рублях. Если денежными средствами инвестора будет иностранная валюта, то выводы по эффективности инвестирования денежных средств могут быть другими.

Рассмотрим совмещение конвертации валюты и наращение простых и сложных процентов. Всего возможны четыре варианта:

1. Без конвертации. Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение производится по простой валютной ставке процентов.

2. С конвертацией. Валютные средства конвертируются в рубли, наращение производится по простой рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется обратно в исходную валюту.

3. Без конвертации. Рублевая сумма размещается в качестве рублевого депозита, наращение производится по простой рублевой ставке процентов.

4. С конвертацией. Рублевая сумма конвертируется в валюту, которая размещается в валютный депозит, наращение производится по простой валютной ставке процентов, наращенная сумма в конце операции конвертируется в рубли.

Операции без конвертации мы рассматривать не будем, так как они не представляют никакой сложности и осуществляются по обычной схеме наращения простых или сложных процентов. В операции наращения с двойной конвертацией источником дохода служат начисление процентов и изменение валютного курса. Причем изменение валютного курса может приводить как к получению дохода, так и к убыткам.

Индексом v будем обозначать валютные средства, а индексом r рублевые средства. K_0 и K_1 соответственно будем обозначать курс обмена в начале операции и курс обмена в конце операции (курс валюты в рублях).

Рассмотрим второй вариант. Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обмена наращенной рублевой суммы на валюту.

Наращенная сумма в конце операции в валюте составит:

$$FV_v = PV_v \times K_0 \times (1 + n \times r_r) \times \frac{1}{K_1}. \quad (3.1)$$

Множитель наращения с учетом двойной конвертации равен:

$$m = \frac{K_0}{K_1} \times (1 + n \times r_r) = \frac{1 + n \times r_r}{\frac{K_1}{K_0}} = \frac{1 + n \times r_r}{k}, \quad (3.2)$$

где $k = K_1 / K_0$ - темп роста обменного курса за срок операции.

Пример 3.1. Инвестор предполагает провести следующую операцию. Вначале конвертировать 5 тыс. долл. в рубли, затем поместить полученную сумму на рублевый депозит на три месяца и в завершение

операции конвертировать наращенную сумму в доллары. Определить наращенную сумму в долларах, если на рублевый депозит начисляются простые проценты в размере 6 % годовых. Обменный курс на начало операции 62,54 рубля за доллар, а на конец операции прогнозируется обменный курс 62,68 рубля за доллар. Сравнить указанную операцию с открытием валютного депозита, на который начисляются простые проценты в размере 4 % годовых.

При операции с конвертацией валюты -

$$FV_v = 5000 \times 62,54 \times \left(1 + \frac{3}{12} \times 0,06\right) \times \frac{1}{62,68} = 5063,66 \text{ долл.}$$

При операции без конвертации валюты -

$$FV_v = 5000 \times \left(1 + \frac{3}{12} \times 0,04\right) = 5050 \text{ долл.}$$

Из расчетов следует, что при указанных исходных условиях операция с конвертацией валюты более выгодна для инвестора, чем открытие валютного депозита.

Множитель наращения связан линейной зависимостью со ставкой r_r и обратной зависимостью с обменным курсом K_1 в конце операции (или с темпом роста обменного курса k). Рассмотрим зависимость общей доходности операции от соотношения конечного и начального обменного курса валюты.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом, равна:

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{FV_v - PV_v}{PV_v \times n} = \frac{PV_v \times \frac{K_0}{K_1} \times (1 + n \times r_r) - PV_v}{PV_v \times n} = \\ &= \frac{\frac{K_0}{K_1} \times (1 + n \times r_r) - 1}{n} = \frac{1}{k} \times \frac{(1 + n \times r_r)}{n} - \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что с увеличением k доходность r_e падает по гиперболе с асимптотой $-1/n$.

При $k=1$ доходность операции равна рублевой ставке, т.е. $r_e = r_r$. При $k > 1$ $r_e < r_r$, а при $k < 1$ $r_e > r_r$. На рис. 3.1 видно, что при некотором критическом значении k (на рис. 3.1 обозначено как k^*) доходность операции оказывается равной нулю. Из равенства $r_e = 0$ находим, что $k^* = 1 + n \times r_r$, а это означает, что $K^*_1 = K_0 \times (1 + n \times r_r)$.

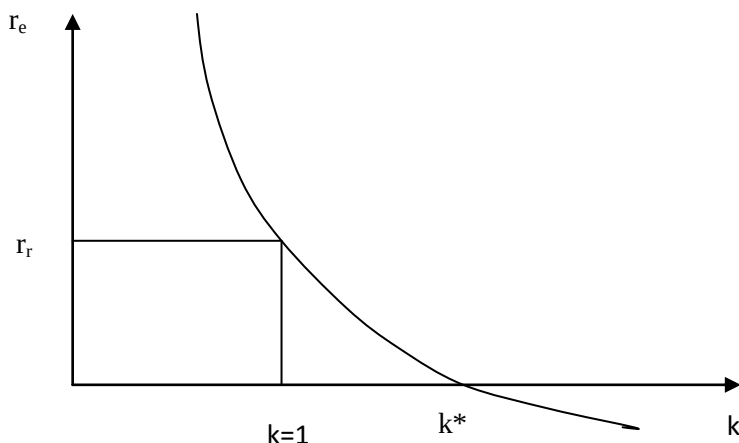


Рисунок 3.1 - Зависимость доходности операции от темпа роста валютного курса (вариант 2)

Если ожидаемые величины k или K_1 превышают свои критические значения, то операция будет убыточной ($r_e < 0$).

Определим максимально допустимое значение курса обмена в конце операции, при котором эффективность операции будет равна существующей ставке по депозитам в валюте и применение двойной конвертации не даст никакой дополнительной выгоды.

Приравняем множители наращивания для двух альтернативных операций[^]

$$1 + n \times r_v = \frac{K_0}{K_1} \times (1 + n \times r_r). \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что

$$\max K_1 = K_0 \times \frac{1 + n \times r_r}{1 + n \times r_v} \quad \text{или} \quad \max k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{1 + n \times r_r}{1 + n \times r_v}. \quad (3.5)$$

Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

Пример 3.2. Определить максимальное значение обменного курса на конец операции, используя данные примера 3.1.

$$\max K_1 = 62,54 \times \frac{1 + \frac{3}{12} \times 0,06}{1 + \frac{3}{12} \times 0,04} = 62,85 \text{ рубля за доллар.}$$

Теперь рассмотрим четвертый вариант. В этом случае трем этапам операции соответствует следующее выражение:

$$FV_r = \frac{PV_r}{K_0} \times (1 + n \times r_v) \times K_1 = PV_r \times (1 + n \times r_v) \times \frac{K_1}{K_0}. \quad (3.6)$$

Пример 3.3. Инвестор предполагает провести следующую операцию. Вначале конвертировать 150 тыс. руб. в евро, затем поместить полученную сумму на валютный депозит на четыре месяца и в завершение операции конвертировать наращенную сумму в рубли. Определить наращенную сумму в рублях, если на валютный депозит начисляются простые проценты в размере 4 % годовых. Обменный курс на начало операции 72,54 рубля за евро, а на конец операции прогнозируется обменный курс 73,68 рубля за евро. Сравнить указанную операцию с открытием рублевого депозита, на который начисляются простые проценты в размере 8 % годовых.

При операции с конвертацией –

$$FV_r = 150000 \times \frac{1}{72,54} \times \left(1 + \frac{4}{12} \times 0,04\right) \times 73,68 = 154388,75 \text{ руб.}$$

При операции без конвертации -

$$FV_r = 150000 \times \left(1 + \frac{4}{12} \times 0,08\right) = 153000 \text{ руб.}$$

Из расчетов следует, что операция с конвертацией валюты при заданных условиях является более выгодной для инвестора, чем открытие рублевого депозита.

В (3.6) множитель наращения линейно зависит от валютной ставки процента.

Доходность операции в целом определяется по формуле:

$$r_e = \frac{FV_r - PV_r}{PV_r \times n} = \frac{PV_r \times \frac{K_1}{K_0} \times (1 + n \times r_v) - PV_r}{PV_r \times n}. \quad (3.7)$$

Отсюда получаем:

$$r_e = \frac{\frac{K_1}{K_0} \times (1 + n \times r_v) - 1}{n} = \frac{k \times (1 + n \times r_v) - 1}{n}. \quad (3.8)$$

Зависимость r_e от k линейная (рис. 3.2).

При $k=1$ $r_e = r_v$, при $k > 1$ $r_e > r_v$, при $k < 1$ $r_e < r_v$. Критическое значение k^* , при котором $r_e = 0$, определяется по формуле:

$$k^* = \frac{1}{1+n \times r_v} \text{ или } K^*_1 = \frac{K_0}{1+n \times r_v}. \quad (3.9)$$

Если ожидаемые величины k или K_1 меньше своих критических значений, то операция будет убыточной.

Минимально допустимая величина k , обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения альтернативных операций.

$$\frac{K_1}{K_0} \times (1+n \times r_v) = 1+n \times r_r. \quad (3.10)$$

Из (3.10) получим:

$$\min k = \frac{1+n \times r_r}{1+n \times r_v} \text{ или } \min K_1 = K_0 \times \frac{1+n \times r_r}{1+n \times r_v}. \quad (3.11)$$

Депозит суммы в рублях через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше, чем $\min K_1$.

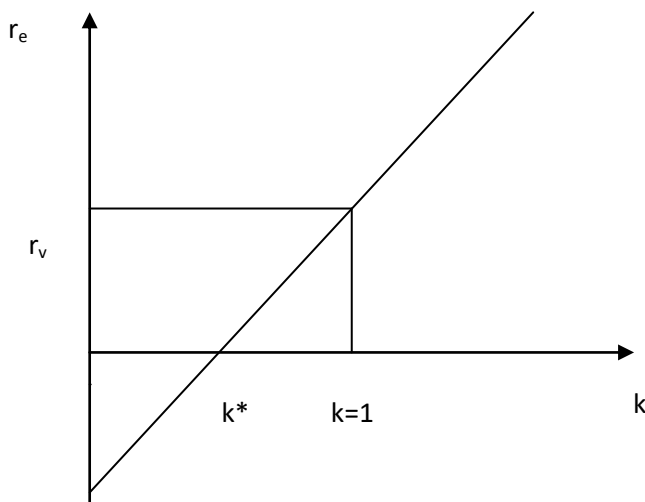


Рисунок 3.2 - Зависимость доходности операции от темпа роста валютного курса (вариант 4)

Пример 3.4. Определить минимальное значение обменного курса на конец операции, используя данные примера 3.3.

$$\min K_1 = 72,54 \times \frac{1 + \frac{4}{12} \times 0,06}{1 + \frac{4}{12} \times 0,04} = 73,02 \text{ рубля за евро.}$$

3.2. Конвертация валюты и начисление сложных процентов

Рассмотрим второй вариант. Три этапа операции можно отразить в следующей формуле:

$$FV_v = PV_v \times K_0 \times (1 + r_r)^n \times \frac{1}{K_1}. \quad (3.12)$$

Множитель наращения будет равен:

$$m = (1 + r_r)^n \times \frac{K_0}{K_1} = \frac{(1 + r_r)^n}{k}. \quad (3.13)$$

Пример 3.5. Определить, что выгоднее для инвестора - провести операцию с конвертацией валюты или открыть валютный депозит на следующих условиях: инвестируемая сумма – 10 тыс. долл., срок операции – 1,5 года, ставка рублевого депозита 6 %, ставка валютного депозита – 4 %, обменный курс на момент конвертации валюты – 62 рубля за доллар, прогнозируемый обменный курс на момент завершения операции – 62,2 рубля за доллар.

При операции с конвертацией валюты –

$$FV_v = 10000 \times 62 \times (1 + 0,06)^{1,5} \times \frac{1}{62,2} = 10878,28 \text{ долл.}$$

При открытии валютного депозита –

$$FV_v = 10000 \times (1 + 0,04)^{1,5} = 10606 \text{ долл.}$$

При заданных условиях операция с конвертацией более выгодна для инвестора.

Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов r_e .

$FV = PV \times (1 + r)^n$, откуда следует, что:

$$r_e = \sqrt[n]{\frac{FV_v}{PV_v}} - 1. \quad (3.14)$$

Подставим в эту формулу значение FV_v и в результате получим:

$$r_e = \sqrt[n]{\frac{PV_v \times (1+r_r)^n * \frac{K_0}{K_1}}{PV_v}} - 1 = \frac{1+r_r}{\sqrt[n]{k}} - 1. \quad (3.15)$$

Из формулы (3.15) видно, что с увеличением темпа роста k эффективность операции в виде r_r падает. Рассмотрим это на графике рис. 3.3.

Анализ показывает, что при $k=1$ $r_e = r_r$, при $k>1$ $r_e < r_r$, а при $k<1$ $r_e > r_r$.

Критическое значение k , при котором эффективность операции равна нулю ($r_e = 0$), определяется как $k^* = (1+r_r)^n$. Это означает, что среднегодовой темп роста курса валюты равен коэффициенту наращивания по годовой рублевой ставке процента $\sqrt[n]{k} = (1+r_r)^n$. Отсюда следует, что если ожидаемые величины k и K_1 больше своих критических значений, то операция будет убыточной, т.е. $r_e < 0$.

Максимально допустимое значение k , при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке r_v , находится из условия равенства множителей наращивания альтернативных операций.

$$(1+r_v)^n = \frac{(1+r_r)^n}{k}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) получим:

$$k_{\max} = \left(\frac{1+r_r}{1+r_v} \right)^n \text{ или } \max K_1 = K_0 \times \left(\frac{1+r_r}{1+r_v} \right)^n. \quad (3.17)$$

Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

Пример 3.6. Определить максимальное значение обменного курса на конец операции, используя данные примера 3.5:

$$\max K_1 = 62 \times \left(\frac{1+0,06}{1+0,04} \right)^{1,5} = 63,8 \text{ рубля за доллар.}$$

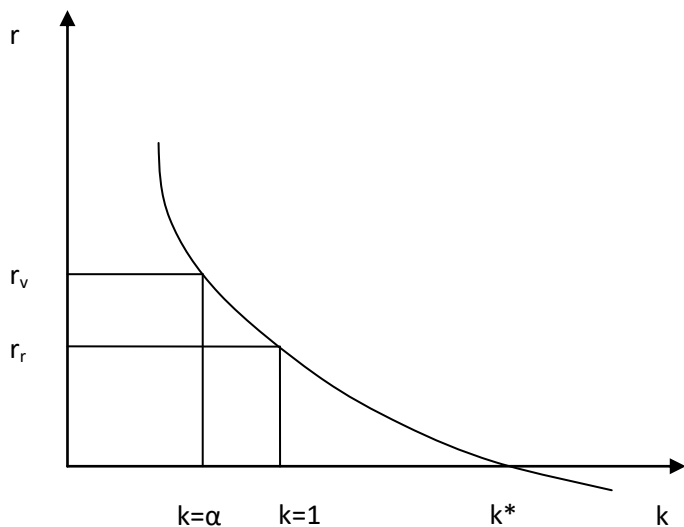


Рисунок 3.3 - Зависимость доходности операции от темпа роста валютного курса (вариант 2 при сложной ставке процента).

Теперь рассмотрим четвертый вариант. Трем этапам операции соответствует следующая формула:

$$FV_r = \frac{PV_r}{K_0} \times (1 + r_v)^n \times K_1 = PV_r \times (1 + r_v)^n \times \frac{K_1}{K_0}. \quad (3.18)$$

Пример 3.7. Определить, что выгоднее для инвестора - провести операцию с конвертацией валюты или открыть рублевый депозит на следующих условиях: инвестируемая сумма – 150 тыс. руб., срок операции – 1,5 года, ставка рублевого депозита 6 %, ставка валютного депозита – 4 %, обменный курс на момент конвертации валюты – 73 рубля за евро, прогнозируемый обменный курс на момент завершения операции составит 74,5 рубля за евро.

При проведении операции с конвертацией валюты –

$$FV_r = 150000 \times \frac{1}{73} \times (1 + 0,04)^{1,5} \times 74,5 = 162358,37 \text{ руб.}$$

При открытии рублевого депозита –

$$FV_r = 150000 \times (1 + 0,06)^{1,5} = 163700,52 \text{ руб.}$$

При заданных условиях открытие рублевого депозита для инвестора выгоднее.

При проведении такой операции множитель наращения зависит нелинейно от валютной ставки сложных процентов и линейно от конечного курса обмена валюты. Зависимость доходности операции от роста валютного курса показана на рис. 3.4.

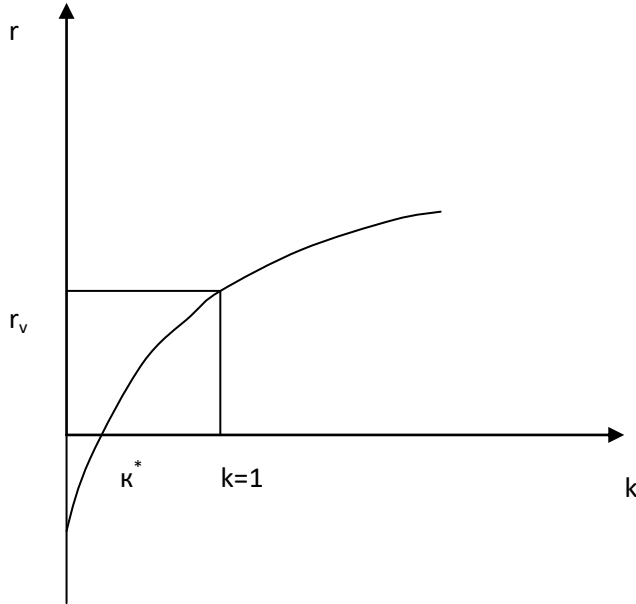


Рисунок 3.4 - Зависимость доходности операции от роста валютного курса (вариант 4 при сложной ставке процента).

$FV = PV \times (1+r)^n$. Отсюда эффективность операции будет равна:

$$r_e = \sqrt[n]{\frac{FV_r}{PV_r}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{PV_r \times (1+r_v)^n \times \frac{K_1}{K_0}}{PV_r}} - 1 = (1+r_v) \times \sqrt[n]{k} - 1 \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) видно, что с ростом k эффективность операции возрастает.

Анализ показывает, что при $k=1$ $r_e = r_v$, при $k>1$ $r_e > r_v$, а при $k<1$ $r_e < r_v$.

Критическое значение k , при котором эффективность операции

равна нулю ($r_e = 0$), определяется как:

$$k^* = \frac{1}{(1+r_v)^n}. \quad (3.20)$$

Это означает, что среднегодовой темп роста курса валюты равен:

$$\sqrt[n]{k} = \frac{1}{1+r_v}. \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что если ожидаемые величины k и K_1 меньше своих критических значений, то операция будет убыточной, т.е. $r_e < 0$.

Минимально допустимая величина k , обеспечивающая такую же доходность, как и депозит в рублях, определяется путем сравнения соответствующих множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $r_e = r_r$).

$$(1+r_r)^n = (1+r_v)^n \times k. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что:

$$k_{\min} = \left(\frac{1+r_r}{1+r_v} \right)^n \text{ или } \min K_1 = K_0 \times \left(\frac{1+r_r}{1+r_v} \right)^n. \quad (3.23)$$

Рублевый депозит через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше $\min K_1$.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните механизм использования депозита с конвертацией валюты.

2. Объясните, в каких случаях использование депозита с конвертацией валюты является более выгодной операцией для вкладчика, чем использование обычного депозита.

3. Покажите, при каких условиях использование депозита с конвертацией становится невыгодным.

4. Покажите, при каких условиях обеспечивается равновыгодность операции с конвертацией валюты и обычного рублевого или валютного депозита.

5. Что лучше для вкладчика - открыть валютный депозит на шесть месяцев под 4 % годовых (ставка процента простая) или конвертировать валюту в рубли и открыть рублевый депозит под 9 % годовых на шесть месяцев с последующей конвертацией в иностранную валюту? Курс иностранной валюты на начало операции 60 руб. 30 коп., на конец операции

63 руб. 45 коп.

6. Что лучше для вкладчика - открыть рублевый депозит в сумме 200 тыс. руб. на два года под 7 % годовых (ставка процента сложная) или конвертировать его в иностранную валюту и положить эту сумму на депозит под 3 % годовых на два года с последующей конвертацией в рубли? Курс иностранной валюты на начало операции 60 руб. 50 коп., на конец операции 62 руб. 30 коп.

7. Определить минимальное значение обменного курса на конец операции. Предполагается вначале конвертировать 250 тыс. руб. в иностранную валюту, затем разместить полученную сумму на валютный депозит на 7 месяцев и в конце операции конвертировать полученную сумму в рубли. Курс иностранной валюты на начало операции 75,3 рубля за единицу валюты, а в конце операции курс прогнозируется 75,8 рубля за единицу валюты. На вклад в иностранной валюте начисляются простые проценты в размере 3 % годовых.

8. Определить максимальное значение обменного курса на конец операции. Предполагается вначале конвертировать 10 тыс. единиц иностранной валюты в рубли, затем разместить полученную сумму на рублевый депозит на 5 месяцев и в конце операции конвертировать полученную сумму в иностранную валюту. Курс иностранной валюты на начало операции 87,7 руб., а в конце операции 88,3 руб. за единицу иностранной валюты. На вклад начисляются сложные проценты в размере 6 % годовых.

ГЛАВА 4. КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

4.1. Финансовая эквивалентность обязательств

В хозяйственной практике возникают случаи, когда партнеры при проведении различного рода финансовых операций встречаются с необходимостью изменить условия контракта. Естественно, партнеры стремятся к тому, чтобы новые условия для них, по крайней мере, были не хуже тех, которые были внесены в первоначальный контракт. В этом случае единственным способом сохранить прежние условия взаимоотношений является обеспечение финансовой эквивалентности обязательств партнеров друг перед другом.

Финансово эквивалентными считаются платежи, которые, будучи приведенными к одному моменту времени, являются равными. Как это было показано ранее, приведение платежей к одному моменту времени возможно по схеме наращения или по схеме дисконтирования.

Схема наращения реализуется в соответствии с формулой $FV = PV \times (1 + n \times r)$ при применении простых процентов или $FV = PV \times (1 + r)^n$ при применении сложных процентов. А схема дисконтирования реализуется в соответствии с формулой $PV = FV \times (1 + n \times r)^{-1}$ при применении простых процентов или $PV = FV \times (1 + r)^{-n}$ при применении сложных процентов.

Величину PV , полученную дисконтированием FV , называют современной, текущей стоимостью или приведенной величиной FV . Суммы PV и FV эквивалентны, так как платеж в сумме FV через n лет равноценен сумме PV , выплачиваемой в настоящий момент.

Две денежные суммы FV_1 и FV_2 , выплачиваемые в разные моменты времени, являются эквивалентными, если их суммы, приведенные к одному моменту времени по одной и той же процентной ставке, будут равны.

Часто для получения эквивалентности финансовых обязательств необходимо рассчитать величину или процентной ставки, или срока платежа, при которых достигается это условие.

При сравнении двух платежей, которые различаются величиной платежей FV , величиной процентных ставок и сроком платежей n , то можно найти такую процентную ставку r_0 , при которой величины приведенных стоимостей этих платежей будут равны.

Например, имеются два варианта платежей FV_1 и FV_2 , для которых надо найти условия финансовой эквивалентности:

$$PV_1 = \frac{FV_1}{1+n_1 \times r_1} \text{ и } PV_2 = \frac{FV_2}{1+n_2 \times r_2}. \quad (4.1)$$

Определим процентную ставку, при которой эти платежи будут финансово эквивалентны, для этого приравняем PV_1 и PV_2 и найдем r , которая обеспечивает это равенство, имея в виду, что $PV = f(r)$:

$$\frac{FV_1}{1+n_1 \times r_1} = \frac{FV_2}{1+n_2 \times r_2}; \quad r_1 = r_2 = r_0. \quad (4.2)$$

Исходя из этого равенства, после несложных преобразований получим формулу для определения r_0 :

$$r_0 = \frac{1 - \frac{FV_1}{FV_2}}{\frac{FV_1}{FV_2} \times n_2 - n_1}. \quad (4.3)$$

Пример 4.1. Определить процентную ставку, обеспечивающую финансовую эквивалентность обязательств. Возможны два варианта оплаты:

- 1) 550 тыс. руб., которые надо выплатить через три месяца;
- 2) 600 тыс. руб., которые надо выплатить через шесть месяцев.

$$r_0 = \frac{1 - \frac{550}{600}}{\frac{550}{600} \times \frac{6}{12} - \frac{3}{12}} = 0,4 \text{ или } 40 \, \%.$$

600 тыс. руб. выгоднее выплатить через шесть месяцев, если процентная ставка будет меньше 40 %.

Аналогичным способом можно определить срок, при котором платежи будут финансово эквивалентны. Для этого приравняем PV_1 и PV_2 и найдем n , который обеспечивает это равенство, имея в виду, что $PV = f(n)$:

$$\frac{FV_1}{1+n_1 \times r_1} = \frac{FV_2}{1+n_2 \times r_2}; \quad n_1 = n_2 = n_0. \quad (4.4)$$

Из равенства (4.4) можно получить n_0 :

$$n_0 = \frac{1 - \frac{FV_1}{FV_2}}{\frac{FV_1}{FV_2} \times r_2 - r_1}. \quad (4.5)$$

Пример 4.2. Определить срок платежа, обеспечивающий финансовую эквивалентность обязательств. Возможны два варианта займа денежных средств:

1) 550 тыс. руб., на которые начисляются проценты в размере 12 % годовых;

2) 600 тыс. руб., на которые начисляются проценты в размере 15 % годовых.

$$n_0 = \frac{1 - \frac{550}{600}}{\frac{550}{600} \times 0,15 - 0,12} = 4,76 \text{ года}$$

Заем 600 тыс. руб. под 15 % годовых выгоднее, если срок инвестирования меньше 4,76 года.

Если применяются сложные проценты, то равновесные процентная ставка и срок оплаты соответственно находятся из равенств:

$$FV_1 \times (1 + r_1)^{-n_1} = FV_2 \times (1 + r_2)^{-n_2} \text{ при } r_1 = r_2 = r_0; \quad (4.6)$$

$$FV_1 \times (1 + r_1)^{-n_1} = FV_2 \times (1 + r_2)^{-n_2} \text{ при } n_1 = n_2 = n_0. \quad (4.7)$$

Тогда, после преобразований получим r_0 и n_0 соответственно:

$$r_0 = {}^{n_2 - n_1} \sqrt[n_2]{\frac{FV_2}{FV_1}} - 1, \quad (4.8)$$

$$n_0 = \frac{\ln FV_2 - \ln FV_1}{\ln(1 + r_2) - \ln(1 + r_1)}. \quad (4.9)$$

Пример 4.3. Определить процентную ставку, обеспечивающую финансовую эквивалентность обязательств. Условия из примера 4.1.

$$r_0 = {}^{0,5 - 0,25} \sqrt[0,25]{\frac{600}{550}} - 1 = 0,416 \text{ или } 41,6 \%$$

600 тыс. руб. выгоднее выплатить через шесть месяцев, если про-

центная ставка будет меньше 41,6 %.

Пример 4.4. Определить срок платежа, обеспечивающий финансовую эквивалентность обязательств. Условия из примера 4.2.

$$n_0 = \frac{\ln 600 - \ln 550}{\ln(1+0,15) - \ln(1+0,12)} = 3,3 \text{ года.}$$

Заем 600 тыс. руб. под 15 % годовых выгоднее, если срок инвестирования меньше 3,3 года.

4.2. Консолидация задолженности

Одним из наиболее часто встречающихся случаев изменения условий контракта является консолидация (объединение) задолженности. Это происходит, когда два или более платежей заменяются одним платежом. Тогда задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть несколько платежей $FV_1, FV_2, \dots, FV_m$ со сроками $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним платежом FV_0 со сроком n_0 . Требуется определить FV_0 при заданном n_0 или определить n_0 при заданном FV_0 . Общий способ решения таких задач заключается в разработке уравнения эквивалентности. В уравнении эквивалентности сумма заменяемых платежей, приведенных к определенному моменту времени, приравнивается к сумме заменяющих платежей, приведенных к этому же моменту времени.

Определение суммы консолидированного платежа. Общий смысл этой задачи показан на рис. 4.1.

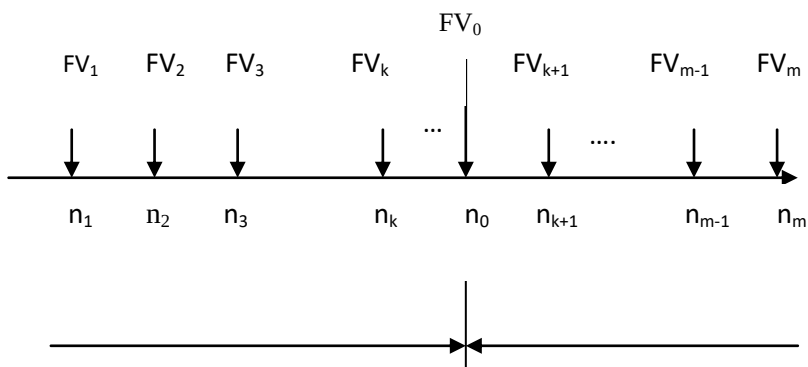


Рисунок 4.1 - Схема определения суммы консолидированного платежа

Пусть несколько платежей осуществляются в сроки $n_1 < n_2 < \dots < n_m$, причем n_0 находится между n_1 и n_m .

Тогда:

$$FV_0 = \sum_{j=1}^k FV_j \times (1 + t_j \times r) + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1 + t_j \times r)^{-1}, \quad (4.10)$$

где FV_j при $j=1 \div k$ - суммы объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$; FV_j при $j=k+1 \div m$ - суммы объединяемых платежей со сроками $n_j > n_0$; тогда $t_j = n_0 - n_j$ при $j=1 \div k$ и $t_j = n_j - n_0$ при $j=k+1 \div m$.

Если строго соблюдается неравенство $n_0 > n_m$, то:

$$FV_0 = \sum_j FV_j \times (1 + t_j \times r). \quad (4.11)$$

Пример 4.5. Объединить два платежа в размере 200 тыс. руб. и 500 тыс. руб. со сроками соответственно 150 дней и 230 дней в один платеж со сроком 200 дней. Процентная ставка 15 % годовых. Применить английскую практику.

$$FV_0 = 200 \times \left(1 + \frac{200-150}{365} \times 0,15\right) + 500 \times \left(1 + \frac{230-200}{365} \times 0,15\right)^{-1} = 698,181 \text{ тыс. руб.}$$

Определить сумму консолидированного платежа можно и при использовании сложных процентов. Для общего случая, когда $n_1 < n_0 < n_m$, расчетная формула имеет следующий вид [обозначения аналогичны обозначениям в (4.10)]:

$$FV_0 = \sum_{j=1}^k FV_j \times (1+r)^{t_j} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1+r)^{-t_j}. \quad (4.12)$$

Пример 4.6. Два платежа 600 тыс. руб. и 800 тыс. руб. со сроками уплаты соответственно 1,5 и 3 года объединить в один платеж со сроком 2 года. Использовать ставку сложных процентов в размере 15 % годовых.

$$FV_0 = 600 \times (1+0,15)^{0,5} + 800 \times (1+0,15)^{-1} = 1339,08 \text{ тыс. руб.}$$

Определение срока консолидированного платежа. В случае когда задана сумма консолидированного платежа FV_0 , необходимо определить срок этого платежа - n_0 . При решении такой задачи более удобным является использование схемы дисконтирования, хотя при необходимости можно использовать и схему наращения. Схема определения срока консолидированного платежа с использованием дисконтирования приведена на рис. 4.2.

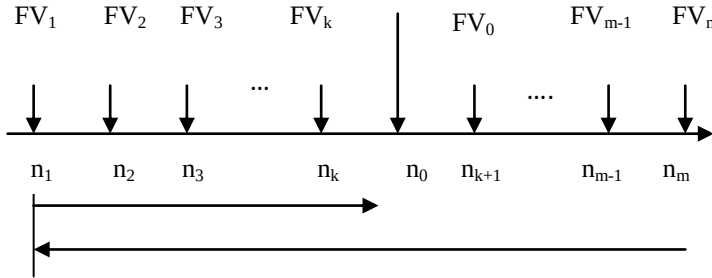


Рисунок 4.2 - Схема определения срока консолидированного платежа

При использовании простой процентной ставки уравнение эквивалентности с учетом принятых обозначений выглядит следующим образом:

$$FV_0 \times (1 + n_0 \times r)^{-1} = \sum_{j=1}^k FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1}. \quad (4.13)$$

После преобразований получим:

$$n_0 = \frac{1}{r} \times \left(\frac{FV_0}{\sum_{j=1}^k FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1}} - 1 \right). \quad (4.14)$$

Решение уравнения (4.14) может быть получено, только если $FV_0 > \sum_{j=1}^k FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1 + n_j \times r)^{-1}$, т.е. когда величина заменяющего платежа больше суммы приведенных стоимостей заме-

няемых платежей.

При использовании сложных процентов уравнение эквивалентности с учетом принятых обозначений выглядит следующим образом:

$$FV_0 \times (1 + n_0 \times r)^{-n_j} = \sum_{j=1}^k FV_j \times (1+r)^{-n_j} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1+r)^{-n_j}. \quad (4.15)$$

Отсюда:

$$n_0 = \frac{\ln \left(\frac{FV_0}{\sum_{j=1}^k FV_j \times (1+r)^{-n_j} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1+r)^{-n_j}} \right)}{\ln(1+r)}. \quad (4.16)$$

Решение этого уравнения существует, если

$$FV_0 > \sum_{j=1}^k FV_j \times (1+r)^{-n_j} + \sum_{j=k+1}^m FV_j \times (1+r)^{-n_j}.$$

Пример 4.7. Платежи в размере 2, 3, 4 млн руб. должны быть выплачены соответственно через 3, 6 и 9 месяцев. Стороны контракта договорились заменить их одним платежом в размере 9 млн руб. с отсрочкой платежа. Начисляются простые проценты в размере 12 % годовых. Определить срок консолидированного платежа.

$$n_0 = \frac{1}{0,12} \times \left(\frac{9}{2 \times \left(1 + \frac{3}{12} \times 0,12\right)^{-1} + 3 \times \left(1 + \frac{6}{12} \times 0,12\right)^{-1} + 4 \times \left(1 + \frac{9}{12} \times 0,12\right)^{-1}} - 1 \right) = 0,55$$

года или 6,6 месяца.

Пример 4.8. На основе данных примера 4.6 определить срок консолидированного платежа в размере 1200 тыс. руб.

$$n_0 = \frac{\ln \left(\frac{1200}{600 \times (1+0,15)^{-1,5} + 800 \times (1+0,15)^{-3}} \right)}{\ln(1+0,15)} = 1,21 \text{ года.}$$

В общем виде уравнение эквивалентности при определении суммы неизвестного заменяющего платежа при использовании как простых процентов, так и сложных процентов может записываться по схеме на-

ращения и по схеме дисконтирования.

При использовании простых процентов по схеме наращивания уравнение эквивалентности выглядит следующим образом:

$$\sum_l FV_l \times (1 + n_l \times r) = \sum_j FV_j \times (1 + n_j \times r), \quad (4.17)$$

где FV_l и FV_j - соответственно величины заменяемых и заменяющих платежей; n_l и n_j - соответственно сроки заменяемых и заменяющих платежей.

При использовании сложных процентов по схеме дисконтирования уравнение эквивалентности записывается следующим образом:

$$\sum_l FV_l \times (1+r)^{-n_l} = \sum_j FV_j \times (1+r)^{-n_j}. \quad (4.18)$$

Пример 4.9. Два платежа в размере 2 и 3 млн руб. должны быть произведены соответственно 1 марта и 15 августа. Стороны контракта согласились изменить порядок выплат. Должник выплачивает 1 июля 4 млн руб., а оставшуюся сумму 1 декабря. Необходимо найти эту сумму при условии, что используется ставка простых процентов в размере 15 %. Использовать немецкую практику расчетов.

В качестве даты приведения используется дата последнего платежа.

Решение задачи осуществляется с использованием схемы наращивания.

$$2 \times \left(1 + \frac{270}{360} \times 0,15 \right) + 3 \times \left(1 + \frac{105}{360} \times 0,15 \right) = 4 \times \left(1 + \frac{150}{360} \times 0,15 \right) + FV.$$

$$FV = 2,225 + 3,13 - 4,25 = 1,106 \text{ млн руб.}$$

Пример 4.10. Должник должен выплатить 25 млн руб. через пять лет. Стороны внесли изменения в контракт. В соответствии с изменениями должник должен выплатить через два года 5 млн руб., еще через два года 10 млн руб., а оставшуюся сумму еще через два года. Определить величину остатка платежа, если используется сложная процентная ставка в размере 15 % годовых.

Решение задачи осуществляется с использованием схемы дисконтирования.

$$25 \times (1 + 0,15)^{-5} = 5 \times (1 + 0,15)^{-2} + 10 \times (1 + 0,15)^{-4} + FV \times (1 + 0,15)^{-6}.$$

$$FV = \frac{12,429 - 3,781 - 5,718}{0,432} = 6,782 \text{ млн руб.}$$

4.3. Эквивалентность процентных ставок

Формулы эквивалентности процентных ставок выводятся из равенства множителей наращения или коэффициентов дисконтирования.

Процентная ставка, характеризующая доход при наращении, и учетная ставка, характеризующая доход при операции учета, являются взаимосвязанными и взаимозависимыми.

Процентную ставку можно выразить через учетную ставку и на-оборот.

Если

$$r \times PV = FV - PV,$$

$$PV = FV - d \times FV,$$

$$\text{тогда } r \times (FV - d \times FV) = FV - (FV - d \times FV).$$

После преобразований получим:

$$r \times FV \times (1 - d) = d \times FV.$$

Итоговая формула будет иметь вид:

$$r = \frac{d}{1 - d}. \quad (4.19)$$

Если

$$d \times FV = FV - PV,$$

$$FV = PV \times (1 + r),$$

$$\text{тогда } d \times PV \times (1 + r) = PV \times (1 + r) - PV.$$

После преобразований получим:

$$d \times PV \times (1 + r) = PV \times r.$$

Итоговая формула будет иметь вид:

$$d = \frac{r}{1 + r}. \quad (4.20)$$

В случае если используются сложные проценты, расчетные формулы выглядят следующим образом:

$$r^* = \frac{d^*}{1 - d^*}, \quad (4.21)$$

$$d^* = \frac{r^*}{1 + r^*}. \quad (4.22)$$

Построим уравнение эквивалентности для простой и сложной про-

центных ставок:

$$(1 + n \times r) = (1 + r^*)^n, \quad (4.23)$$

где r^* - обозначение сложной процентной ставки.

Уравнение (4.23) предполагает, что начальные и наращенные суммы при использовании, как простой, так и сложной процентной ставки равны. При решении уравнения (4.23) получим:

$$r = \frac{(1 + r^*)^n}{n} - 1, \quad (4.24)$$

$$r^* = \sqrt[n]{1 + n \times r} - 1. \quad (4.25)$$

В случае если проценты начисляются несколько раз в год, расчетные формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\left(1 + n \times \frac{r}{m} \times m\right) = \left(1 + \frac{r^*}{m}\right)^{m \times n}, \quad (4.26)$$

$$r = \frac{\left(1 + \frac{r^*}{m}\right)^{m \times n} - 1}{n}, \quad (4.27)$$

$$r^* = m \times \left(\sqrt[m \times n]{1 + n \times r} - 1\right) \quad (4.28)$$

Аналогично выводятся формулы эквивалентности для учетных ставок:

- при учете один раз в год:

$$(1 - n \times d) = (1 - d^*)^n, \quad (4.29)$$

где d^* - обозначение сложной учетной ставки.

$$d = \frac{1 - (1 - d^*)^n}{n}, \quad (4.30)$$

$$d^* = 1 - \sqrt[n]{1 - n \times d}; \quad (4.31)$$

- при учете m раз в год:

$$\left(1 - n \times \frac{d}{m} \times m\right) = \left(1 - \frac{d^*}{m}\right)^{m \times n}, \quad (4.32)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{d^*}{m}\right)^{m \times n}}{n}, \quad (4.33)$$

$$d^* = m \times \left(1 - \sqrt[m \times n]{1 - n \times d}\right). \quad (4.34)$$

Пример 4.11. Определить величину простой процентной ставки, эквивалентной сложной процентной ставке, в размере 12 % годовых, начисляемой раз в квартал. Срок операции 420 дней. При расчетах использовать немецкую практику.

$$r = \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4 \times \frac{420}{360}} - 1}{\frac{420}{360}} = 0,1265 \text{ или } 12,65 \, \%.$$

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным процентам и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить путем приравнивания соответствующих множителей наращения:

$$(1+r)^n = e^{\delta \times n}.$$

Тогда:

$$\delta = \ln(1+r), \quad (4.35)$$

$$r = e^{\delta} - 1. \quad (4.36)$$

Пример 4.12. Сумма, на которую начисляются проценты, 3 млн руб., сила роста 12 %, срок начисления процентов 5 лет. Определить наращенную сумму, эквивалентную величину сложных процентов.

$$FV = 3000000 \times e^{0,12 \times 5} = 5466356,4 \text{ руб.}$$

$$r = e^{0,12} - 1 = 0,1274968515 \text{ или } 12,74968515 \, \%.$$

$$FV = 3000000 \times (1 + 0,1274968515)^5 = 5466356,4 \text{ руб.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте объяснение понятию «финансовая эквивалентность обязательств».

2. В каком случае наращенная и текущая стоимость обязательства являются финансово эквивалентными?

3. В каком случае две денежные суммы являются финансово эквивалентными?

4. К какому моменту времени можно приводить заменяемые и заменяющие суммы при построении уравнения эквивалентности?

5. Постройте схему определения суммы консолидированного платежа.

6. Постройте схему определения срока консолидированного платежа.

7. Из какого условия выводятся формулы эквивалентности процентных ставок?

8. Определить простую процентную ставку, при которой два варианта платежей будут финансово эквивалентными:

а) платеж размером 50 тыс. руб., совершаемый в настоящее время;

б) платеж размером 60 тыс. руб., совершаемый через два года.

9. Определите срок операции, обеспечивающий финансовую эквивалентность (проценты сложные) обязательств:

а) депозит в размере 50 тыс. руб. по ставке 7 % годовых;

б) депозит в размере 60 тыс. руб. по ставке 5 % годовых.

10. Объединить два платежа в размере 200 тыс. руб. и 500 тыс. руб. со сроками соответственно 150 дней и 200 дней в один платеж размером 700 тыс. руб. с отсрочкой платежа. Процентная ставка 15 % годовых.

11. Должник должен выплатить 1,5 млн руб. 1 апреля и 2,5 млн руб. 1 сентября. Должник и кредитор договорились об изменении условий платежей. Теперь должник должен выплатить 1 млн. руб. 1 марта, а оставшуюся сумму 1 декабря. Определить размер этой суммы, если на долг начисляются простые проценты в размере 6 % годовых.

12. Должник должен погасить долг в размере 7 млн руб. через 3 года. Стороны изменили условия возврата денег. Теперь должник должен через год выплатить 2 млн руб., еще через два года 3 млн руб. и остаток выплатить еще через год. Определить остаток платежа, если используется сложная процентная ставка в размере 6 % годовых.

13. Вексель выдан под 15 % годовых. Определить размер учетной ставки при учете векселя в момент выдачи.

14. Определить величину сложной процентной ставки эквивалентной простой процентной ставке в размере 18 % годовых, если срок операции 250 дней.

15. Определить величину простой процентной ставки эквивалентной сложной процентной ставке в размере 8 % годовых, начисляемых ежемесячно. Срок операции 560 дней.

ГЛАВА 5. ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ

5.1. Виды финансовых рент

До сих пор мы рассматривали финансовые операции с единственным платежом в настоящее время или прогнозируемой денежной суммой в будущем. Ситуация изменится, если денежных сумм будет несколько за некоторый период времени. На практике такие ситуации встречаются очень часто. Например, необходимость накопить некоторую сумму для оплаты учебы или для обеспечения дополнительных средств после выхода на пенсию требует вложения каждый год денежных средств на банковский счет, на которые начисляются проценты. Это может быть инвестирование в ценные бумаги, например в облигации, которые могут обеспечить в будущем денежный поток в виде ежегодных купонных выплат. При получении займа в банке также возникают денежные потоки в виде периодических выплат при его погашении. Могут встречаться и другие случаи или инвестирования, или получения денежных сумм в долг. И в одном и в другом случае возникают множественные денежные потоки.

Инвестиции могут генерировать доходы в течение нескольких лет. В этом случае возникают положительные денежные потоки. При заимствовании денежных средств возникают отрицательные денежные потоки в виде периодических выплат для погашения займа.

Математически денежный поток можно определить как последовательность поступлений денежных средств и моментов времени, в которые они осуществлены.

Отдельные поступления денежных средств называются элементами денежного потока и могут быть независимыми или связанными между собой определенным алгоритмом.

Важным инструментом анализа денежных потоков во времени является временной график, который рекомендуется использовать при решении любых теоретических и практических задач.

Например, инвестиция в 1000 денежных единиц обеспечивает получение 200 денежных единиц в конце первого периода, 500 денежных единиц в конце второго периода и 600 денежных единиц в конце третьего периода. На временном графике это можно изобразить следующим образом (рис. 5.1).

Взаимосвязь элементов денежного потока может быть прямой или обратной. В первом случае оценка денежного потока осуществляется по схеме наращения.

Предположим, на счет каждый год вносится 1000 денежных единиц, на которые начисляются проценты по ставке 10 % годовых. Опре-

делим, какая сумма будет на счете через три года. К концу первого года внесенная на счет сумма составит 1100 денежных единиц. К этой сумме в начале второго года добавится 1000 денежных единиц, и сумма на счете составит 2100 денежных единиц. Тогда к концу второго года на счете будет $2100 \times 1,1$ или 2310 денежных единиц. В начале третьего года к этой сумме добавится еще 1000 денежных единиц, и сумма на счете составит 3310 денежных единиц. К концу третьего года сумма на счете составит $3310 \times 1,1$ или 3641 денежная единица.

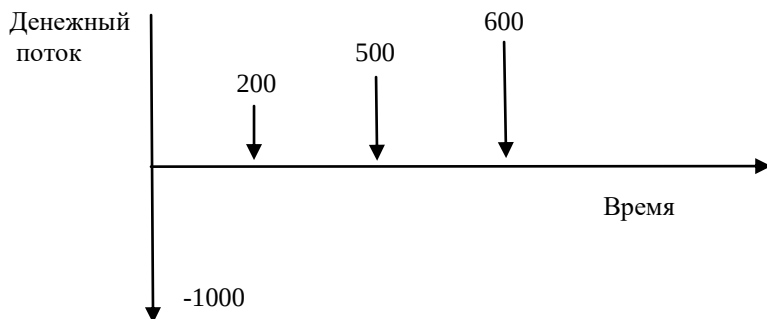


Рисунок 5.1 - Денежный поток во времени

Наращенную сумму в конце третьего года можно найти и другим способом. Для этого надо отдельно рассчитать наращенную сумму всех трех вкладов и затем сложить полученные величины. Тогда наращенная стоимость первого вклада равняется: $1000 \times 1,1^3 = 1331$ денежная единица. Наращенная стоимость второго вклада будет равна: $1000 \times 1,1^2 = 1210$ денежных единиц. Наращенная стоимость третьего вклада составит: $1000 \times 1,1 = 1100$ денежных единиц. Сложив полученные суммы, будем иметь ту же самую величину в 3641 денежную единицу.

Часто необходимо рассчитать приведенную, а не наращенную стоимость нескольких элементов денежного потока. В этом случае расчеты проводятся по схеме дисконтирования. Денежный поток, все элементы которого приведены к настоящему моменту времени с помощью дисконтирующих множителей, называется приведенным.

Предположим, что надо определить сумму вклада на три года под процентную ставку 10 % годовых, если требуется получить 1000 денежных единиц через год, затем 2000 денежных единиц через два года и 3000 денежных единиц через три года.

Найдем приведенные суммы указанных элементов денежного потока. Приведенная сумма первого элемента составит $1000 \times 1,1^{-1} = 909,09$ денежных единиц. Приведенная сумма второго элемента будет равна

$2000 \times 1,1^{-2} = 1652,89$ денежных единиц. И, наконец, приведенная сумма третьего элемента равна $3000 \times 1,1^{-3} = 2253,94$ денежных единиц. Сумма приведенных элементов денежного потока равна 4815,92 денежных единиц.

Сделаем проверочный расчет. Если на счет будет положена указанная выше сумма, то в конце года на счете будет $4815,92 \times 1,1 = 5297,512$ денежных единиц. После того как со счета будет снято 1000 денежных единиц, на счете останется 4297,512 денежных единиц. К концу второго года на счете будет сумма $4297,512 \times 1,1 = 4727,263$ денежных единиц. После того как будет снято 2000 денежных единиц, на счете останется 2727,263 денежных единицы. К концу третьего года на счете будет сумма $2727,263 \times 1,1 = 3000$ денежных единиц, что соответствует условиям задачи.

Денежные потоки можно классифицировать по нескольким признакам:

1) по количеству поступлений денежных средств различают срочные (конечные) и бессрочные (бесконечные) потоки;

2) по величине интервалов между поступлениями денежных средств различают денежные потоки с равными (постоянными) и с неравными (непостоянными) интервалами;

3) по равенству отдельных платежей различают денежные потоки с равными и с неравными поступлениями;

4) по моменту поступления денежных средств в выбранном временном интервале различают потоки с поступлениями денежных средств в начале интервала (пренумерандо) (рис. 5.2) и потоки с поступлением денежных средств в конце интервала (постнумерандо) (рис. 5.3);

5) по вероятности выплаты различают денежные потоки верные и условные. Верные потоки подлежат безусловной выплате, а выплата условных денежных потоков связана с наступлением некоторого случайного события.

Во многих случаях, например в сберегательных схемах, инвестиционных проектах, схемах возврата кредита, будущие денежные поступления или выплаты остаются неизменными по величине и срокам платежей. Такой денежный поток с равными интервалами и равными поступлениями называется финансовой рентой или аннуитетом. По количеству поступлений принято выделять:

1) срочный аннуитет или конечную финансовую ренту, когда количество поступлений ограничено;

2) бессрочный аннуитет или вечную финансовую ренту, когда количество поступлений неограничено.

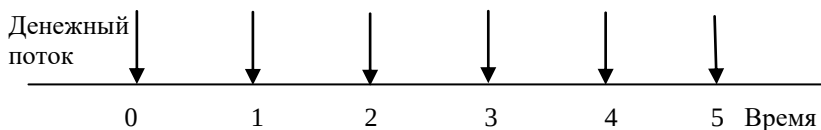


Рисунок 5.2 - Денежный поток пренумерандо

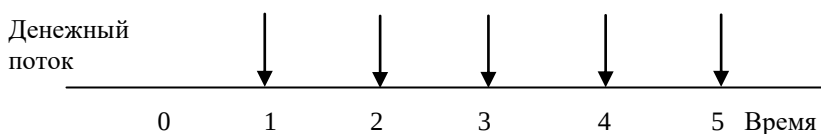


Рисунок 5.3 - Денежный поток постнумерандо

Конечная рента с одним платежом в год называется конечной годовой рентой, с несколькими платежами в год – конечной общей рентой.

В теории и практике для различных целей осуществляются расчеты будущей и приведенной стоимости аннуитета.

5.2. Формулы наращенной суммы финансовой ренты

Конечная годовая рента представляет собой простую ренту с одним платежом в год R при длительности в n лет и годовой процентной ставкой r . Наращение осуществляется по формуле сложных процентов. Все расчеты осуществляются для случая ренты постнумерандо.

Предположим, что для некоторых целей необходимо в течение трех лет сформировать денежный фонд, направляя в него каждый год по 1000 денежных единиц. Оценим будущую стоимость денежных накоплений к концу срока, если процентная ставка равна 10 % годовых.

Первый взнос будет произведен в конце первого года, и проценты на него будут начислены два раза, на второй взнос один раз и на третий взнос проценты начислены не будут.

$FV = 1000 \times 1,1^2 + 1000 \times 1,1 + 1000 \times 1 = 1000 \times (1,1^2 + 1,1 + 1) = 3310$ денежных единиц.

Коэффициент, на который умножается 1000 денежных единиц, представляет собой будущую стоимость одной денежной единицы годового платежа для каждого года из трехлетнего периода.

Представим это в общем виде. Рента состоит из n платежей, нара-

щенных к концу срока ренты, что представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке с первым членом R и знаменателем ренты $(1+r)$:

$$R \times (1+r)^{n-1}; R \times (1+r)^{n-2}; \dots; R \times (1+r); R. \quad (5.1)$$

Первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R \times (1+r)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $(n-1)$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+r)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются.

Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии:

$$FV = R \times (1+r)^{n-1} + R \times (1+r)^{n-2} + \dots + R \times (1+r) + R. \quad (5.2)$$

Напомним, что геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число. То есть геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, заданная соотношением:

$$b_{n+1} = b_n \times q, \quad (5.3)$$

где $b_n \neq 0, q \neq 0$.

В (5.3) q – это знаменатель геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}. \quad (5.4)$$

Формула вычисления n -го члена геометрической прогрессии выглядит следующим образом:

$$b_n = b_1 \times q^{n-1}. \quad (5.5)$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна:

$$S_n = \frac{b_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{при } q \neq 1. \quad (5.6)$$

В соответствии с (5.6) наращенную сумму конечной годовой ренты можно определить по формуле:

$$FV = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} = R \times s_{nr}, \quad (5.7)$$

где $s_{nr} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ называется коэффициентом наращения ренты продолжительностью n лет и с процентной ставкой r .

Пример 5.1. Для некоторых целей создается фонд. Денежные средства поступают в фонд в виде конечной годовой ренты постнумерандо в течение четырех лет. Годовой платеж составляет 5 млн руб. На поступившие денежные средства начисляются проценты в размере 15 % годовых. Определить величину фонда.

$$FV = 5 \times \frac{(1+0,15)^4 - 1}{0,15} = 24,967 \text{ млн руб.}$$

При начислении процентов m раз в году наращенная сумма конечной годовой ренты вычисляется по формуле:

$$FV = R \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times (n-1)} + R \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times (n-2)} + \dots + R \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times 2} + R \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m + R. \quad (5.8)$$

При использовании формул вычисления геометрической прогрессии сумма конечной годовой ренты вычисляется по формуле:

$$FV = R \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} - 1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1}. \quad (5.9)$$

Пример 5.2. Используя условия примера 5.1 и учитывая, что проценты начисляются один раз в квартал, определим размеры фонда:

$$FV = 5 \times \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \times 4} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} = 25,276 \text{ млн руб.}$$

Конечная общая рента представляет собой сложную ренту с поступлениями и начислениями процентов несколько раз в год.

Найдем наращенную сумму, если рента выплачивается q раз в год равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года.

Если R – годовая сумма платежей, то размер одного платежа составит $\frac{R}{q}$.

Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке:

$$FV = \frac{R}{q} \times (1+r)^{n-\frac{1}{q}} + \frac{R}{q} \times (1+r)^{n-\frac{2}{q}} + \dots + \frac{R}{q} \times (1+r)^{n-\frac{k}{q}} + \dots + \frac{R}{q}. \quad (5.10)$$

В геометрической прогрессии (5.10) первый член равен $\frac{R}{q}$, знаменатель – $(1+r)^{\frac{1}{q}}$, общее число членов – $n \times q$.

Тогда наращенная сумма такой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$FV = \frac{R}{q} \times \frac{(1+r)^{\frac{1}{q} \times n \times q} - 1}{(1+r)^{\frac{1}{q}} - 1} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{q \times [(1+r)^{\frac{1}{q}} - 1]} = R \times s_{n;r}^{(q)}, \quad (5.11)$$

где $s_{n;r}^{(q)} = \frac{(1+r)^n - 1}{q \times [(1+r)^{\frac{1}{q}} - 1]}$ – коэффициент наращения ренты со сроком n

лет, годовой процентной ставкой r и с выплатами q раз в год при начислении процентов один раз в конце года.

Пример 5.3. Определить размеры фонда на условиях примера 5.1 при платежах один раз в месяц.

$$FV = \frac{5}{12} \times \frac{(1+0,15)^4 - 1}{(1+0,15)^{\frac{1}{12}} - 1} = 26,007 \text{ млн руб.}$$

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Т.е. число платежей q и число начислений процентов m совпадают ($m=q$).

Тогда для получения наращенной суммы можно воспользоваться формулой, аналогичной формуле для расчета конечной годовой ренты.

Для расчета наращенной суммы конечной годовой ренты исполь-

зуется формула (5.7).

Для случая, который мы рассматриваем, расчетная формула будет выглядеть следующим образом:

$$FV = \frac{R}{m} \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} - 1}{\frac{r}{m}} = R \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} - 1}{r}. \quad (5.12)$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда платежи поступают q раз в год через равные интервалы, а общая сумма годовых платежей составляет R . Таким образом, сумма единичного платежа будет равна $\frac{R}{q}$.

Проценты начисляются m раз в год через равные интервалы времени по ставке r сложных процентов на каждый более ранний платеж с учетом момента поступления. Так как k -й платеж отстоит от конца срока ренты на $(n - \frac{k}{q})$ лет, то проценты будут начислены на него $\left[(n - \frac{k}{q}) \times m\right]$ раз

по ставке, равной $\frac{r}{m}$. Величина такого платежа может быть рассчитана по формуле:

$$S_k = \left(\frac{R}{q}\right) \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(n - \frac{k}{q}) \times m}. \quad (5.13)$$

Тогда:

$$FV = \frac{R}{q} \times \sum_{k=1}^{k=n \times q} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(n - \frac{k}{q}) \times m}. \quad (5.14)$$

Используя формулу геометрической прогрессии, получаем нарастающую сумму конечной общей ренты:

$$FV = \frac{R}{q} \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(m/q) \times n \times q} - 1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1} = R \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} - 1}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]}. \quad (5.15)$$

Пример 5.4. Определить размер фонда на условиях примера 5.1, если платежи осуществляются ежемесячно, а проценты начисляются раз в квартал.

$$FV = 5 \times \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \times 4} - 1}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4/12} - 1\right]} = 27,095 \text{ млн руб.}$$

5.3. Формулы современной величины финансовой ренты

Часто для принятия управленческих решений необходимо иметь приведенную стоимость аннуитета. Это необходимо в случаях, когда надо оценить величину денежной суммы, которую необходимо поместить в фонд или на срочный депозит с начислением процентов с целью дальнейшего регулярного использования части средств для производства различных платежей. Кроме того, оценка приведенной стоимости инвестиций является удобной формой оценки их эффективности. Оценка приведенной стоимости денежных средств может использоваться и при составлении уравнений финансовой эквивалентности при выборе наиболее выгодного варианта финансовой операции из нескольких альтернативных вариантов.

Дисконтированная величина первого платежа финансовой ренты будет равна:

$$R \times \frac{1}{1+r} = R \times v, \quad (5.16)$$

где $v = \frac{1}{1+r}$ - дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна $R \times v^2$ и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: $R \times v; R \times v^2; \dots; R \times v^n$, сумма которой равна:

$$PV = R \times v \times \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = R \times p_{n;r}, \quad (5.17)$$

где $p_{n;r} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$ - коэффициент приведения ренты со сроком n лет и годовой процентной ставкой r .

Коэффициент приведения ренты зависит только от срока ренты n и процентной ставки r , поэтому его значения могут быть представлены также в табличном виде.

Для конечной общей ренты формула приведения имеет вид:

$$PV = R \times \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \times n}}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{q}} - 1\right]}. \quad (5.18)$$

Пример 5.5. Определить современную стоимость ренты постнумерандо со следующими параметрами: годовой платеж равен 6 млн руб., платежи производятся равными частями ежемесячно, продолжительность ренты 8 лет, платежи, проценты начисляются один раз в квартал, величина процентной ставки 15 % годовых.

$$PV = 6 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{-4 \times 8}}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4/12} - 1\right]} = 28,059 \text{ млн руб.}$$

Наращение величины PV за n лет дает сумму, равную FV :

$$PV \times (1+r)^n = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \times (1+r)^n = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} = FV. \quad (5.19)$$

Отсюда следует, что дисконтирование величины FV дает PV :

$$FV \times v^n = PV. \quad (5.20)$$

Коэффициенты дисконтирования и наращения ренты связаны следующими соотношениями:

$$p_{n;r} \times (1+r)^n = s_{n;r}, \quad (5.21)$$

$$s_{n;r} \times v^n = p_{n;r}. \quad (5.22)$$

5.4. Определение параметров финансовой ренты

При разработке контрактов иногда возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты FV или ее приведенной стоимости PV других параметров ренты: R , n , r , m , q . Параметры m и q определяются по соглашению сторон при разработке и подписании контракта.

При определении ежегодной **суммы платежа R** в зависимости от того, какая обобщающая характеристика ренты задана (FV или PV), возможны два варианта расчета:

$$R = \frac{FV}{s_{n;r}} \quad (5.23)$$

или

$$R = \frac{PV}{p_{n;r}}. \quad (5.24)$$

Пример 5.6. Определить величину ежегодного платежа для создания целевого фонда в сумме 60 млн руб. Срок создания фонда 4 года, процентная ставка 12 % годовых, платежи постнумерандо.

$$s_{4;12} = \frac{(1+0,12)^4 - 1}{0,12} = 4,78;$$

$$R = \frac{60}{4,78} = 12,55 \text{ млн руб.}$$

Пример 5.7. Определить величину ежегодного платежа для погашения в рассрочку задолженности в 40 млн руб. Срок погашения задолженности 3 года, процентная ставка 16 % годовых, платежи постнумерандо.

$$p_{3;16} = \frac{1 - (1+0,16)^{-3}}{0,16} = 2,25;$$

$$R = \frac{40}{2,25} = 17,78 \text{ млн руб.}$$

При определении **срока ренты n** , решая исходные формулы для FV и PV :

$$FV = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{и} \quad PV = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \quad \text{относительно } n, \text{ получаем два выражения соответственно:}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{R} \times r + 1\right)}{\ln(1+r)}, \quad (5.25)$$

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{PV}{R} \times r\right)}{\ln(1+r)}. \quad (5.26)$$

Последнее выражение имеет смысл только при $R > PV \times r$.

Пример 5.8. Определить срок, необходимый для накопления 80 млн руб., если ежегодно будет вноситься 8 млн руб. Процентная ставка 9 % годовых, платежи постнумерандо.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{80}{8} \times 0,09 + 1\right)}{\ln(1 + 0,09)} = 7,45 \text{ года.}$$

Для того чтобы найти **ставку процента r** , необходимо решить одно из нелинейных уравнений следующего вида:

$FV = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ или $PV = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$, которые эквивалентны двум другим:

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} = \frac{FV}{R} = s_{n;r} \quad (5.27)$$

или

$$\frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = \frac{PV}{R} = p_{n;r}. \quad (5.28)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка r . Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения подобных уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона – Рафсона и др.

При использовании **метода линейной интерполяции** вначале при помощи укрупненных расчетов определяют нижнюю (r_i) и верхнюю (r_a) оценки процентной ставки путем подстановки в одну из формул (5.27), (5.28) различных числовых значений r и сравнения результата с правой частью выражения. Затем производится корректировка нижнего значения процентной ставки по интерполяционной формуле:

$$r = r_n + \frac{r_a - r_n}{s_a - s_n} \times (s_r - s_n), \quad (5.29)$$

где S_r - коэффициент наращения ренты, соответствующий искомой ставке процента.

Полученное значение ставки процента подставляют в левую часть исходного уравнения и сравнивают результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (5.29), заменив в ней значение одной из приближенных ставок процента

на более точное, взятое из предыдущей итерации, и соответствующее ей значение коэффициента наращения ренты.

Пример 5.9. Какая годовая процентная ставка может обеспечить накопление 100 млн руб., если ежегодно вносится по 10 млн руб. в течение 7 лет? Процентную ставку определить с точностью до 0,2 %.

$$\text{Исходный коэффициент наращения } s_{n;r} = \frac{100}{10} = 10.$$

Предположим, что процентная ставка находится в интервале 11 - 12 %.

$$s_{7;11} = \frac{(1+0,11)^7 - 1}{0,11} = 9,78; \quad s_{7;12} = \frac{(1+0,12)^7 - 1}{0,12} = 10,09;$$

$$r = 0,11 + \frac{0,12 - 0,11}{10,09 - 9,78} \times (10 - 9,78) = 0,117 \text{ или } 11,7 \%.$$

Проведем проверку:

$$s_{7;11,7} = \frac{(1+0,117)^7 - 1}{0,117} = 9,996 \%.$$

Найденное значение процентной ставки удовлетворяет поставленной условию точности.

При использовании **метода Ньютона – Рафсона** решение также находим итеративно, постепенно шаг за шагом уточняя оценку. Метод разработан для решения нелинейных уравнений вида $f(x) = 0$. Алгоритм поиска сводится к трем операциям на каждом шаге, которые зависят от постановки задачи (задана FV или PV) и типа ренты.

Общий вид рекуррентного соотношения:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (5.30)$$

где k - номер итерации.

Будем считать, что известна наращенная сумма FV и найдена какая-то начальная оценка процентной ставки (например, методом проб).

1. Конечная годовая рента постнумерандо ($m = 1, q = 1$).

Требуется решить уравнение вида:

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} = \frac{FV}{R} = s_{n;r} \text{ или } \frac{(1+r)^n - 1}{r} - s_{n;r} = 0. \quad (5.31)$$

Введем обозначение $g = 1 + r$. Преобразовав (5.31), получим:

$$f(g_k) = \frac{FV}{R} - \frac{g^n - 1}{g - 1} = 0. \quad (5.32)$$

Умножим обе части уравнения на $(g - 1)$. В результате получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k , состоящий из следующих трех операций:

$$f(g_k) = g_k^n - 1 - \frac{FV}{R} \times (g_k - 1);$$

$$f'(g_k) = n \times g_k^{n-1} - \frac{FV}{R};$$

$$g_{k+1} = g_k - \frac{f(g_k)}{f'(g_k)}.$$

2. Конечная общая рента постнумерандо ($m = 1; q > 1$).

Требуется решить уравнение вида:

$$\frac{(1+r)^n - 1}{\frac{1}{q}} = \frac{FV}{R} = s_{n;r}^{(q)} \quad \text{или} \quad \frac{(1+r)^n - 1}{\frac{1}{q}} - s_{n;r}^{(q)} = 0. \quad (5.33)$$

$$q \times [(1+r)^q - 1]$$

Получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k для рассматриваемого случая:

$$f(g_k) = g_k^n - 1 - \frac{FV}{R} \times q \times (g_k^{1/q} - 1);$$

$$f'(g_k) = n \times g_k^{n-1} - \frac{FV}{R} \times (g_k^{1/q} - 1);$$

$$g_{k+1} = g_k - \frac{f(g_k)}{f'(g_k)}.$$

Замечания:

а) начальную оценку $g_0 = (1 + r_0)$, требующуюся для начала итеративной процедуры, выбирают такой, чтобы соответствующий ей множитель наращения был как можно ближе к заданному отношению

$$\frac{FV}{R};$$

б) остановка вычислений происходит после того, как сравнение множителя наращения и отношения $\frac{FV}{R}$ свидетельствует о достижении заданной точности.

Теперь будем считать, что известна приведенная стоимость PV и

найдена какая-то подходящая начальная оценка процентной ставки.

1. Конечная годовая рента постнумерандо ($m=1, q=1$).

Требуется решить уравнение вида:

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = \frac{PV}{R} = p_{n;r} \text{ или } \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - p_{n;r} = 0. \quad (5.34)$$

Введем обозначение $g = (1+r)$. Преобразовав (5.34), получим:

$$f(g_k) = \frac{PV}{R} - \frac{1-q^{-n}}{q-1} = 0. \quad (5.35)$$

Умножим обе части равенства на $(g-1)$. Получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k , состоящий из следующих трех операций:

$$f(g_k) = g_k^{-n} - 1 + \frac{PV}{R} \times (g_k - 1);$$

$$f'(g_k) = \frac{PV}{R} - n \times g_k^{-(n-1)};$$

$$g_{k-1} = g_k - \frac{f(g_k)}{f'(g_k)}.$$

2. Конечная общая рента постнумерандо ($m=1; q>1$).

Требуется решить уравнение вида:

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{PV}{R} = p_{n;r}^{(q)} \text{ или } \frac{1-(1+r)^{-n}}{\frac{1}{q} - 1} - p_{n;r}^{(q)} = 0. \quad (5.36)$$

Сделав подстановку $g=1+r$, получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k , состоящий из следующих трех операций:

$$f(g_k) = g_k^{n-1} - 1 + \frac{PV}{R} \times q \times \left(g_k^{1/q} - 1\right);$$

$$f'(g_k) = \frac{PV}{R} \times \left(g_k^{1/q} - 1\right) - n \times g_k^{-(n-1)};$$

$$g_{k-1} = g_k - \frac{f(g_k)}{f'(g_k)}.$$

Пример 5.10. Определить доходность инвестиций в виде годовой процентной ставки, если вложения составили 100 млн руб., доход можно представить в виде ренты с годовой суммой 10 млн руб., годовая сумма выплачивается ежеквартально равномерными платежами, срок

ренты 15 лет. Процентную ставку определить с точностью до 0,2 %.

Величина инвестиций равна современной стоимости ренты $PV = 100$ млн руб.

$$\text{Исходный коэффициент приведения } p_{n;r}^q = \frac{PV}{R} = \frac{100}{10} = 10.$$

Значение процентной ставки, близкое к этому коэффициенту, приемлемым равно 6 %.

$$p_{15;6}^4 = \frac{1 - (1 + 0,06)^{-15}}{4 \times [(1 + 0,06)^{1/4} - 1]} = 9,87;$$

$$f(1,06) = 1,06^{-15} - 1 + 10 \times 4 \times (1,06^{1/4} - 1) = 0,0043;$$

$$f'(1,06) = 10 \times 1,06^{(1/4)-1} - 15 \times 1,06^{-16} = 3,667;$$

$$g_1 = 1,06 - \frac{0,0043}{3,667} = 1,0588 \text{ или } 5,88 \text{ \%}.$$

$$\text{Произведем проверку } p_{15;6}^4 = \frac{1 - (1 + 0,0588)^{-15}}{4 \times [(1 + 0,0588)^{1/4} - 1]} = 10,01.$$

Полученная процентная ставка удовлетворяет поставленному условию точности.

5.5. Особые случаи постоянных рент

Вечная рента. Под вечной рентой понимается последовательность платежей, число членов которой неограниченно, т.е. она выплачивается бесконечное число лет (например, бессрочные облигации; консоли – государственные облигации со сроком погашения более тридцати лет). Нарастающая сумма для таких рент возрастает бесконечно, и ее определять бессмысленно, а приведенная сумма имеет определенную величину.

Пределом для коэффициента приведения ренты при $n \rightarrow \infty$ является величина $\frac{1}{r}$. Тогда современная величина бесконечной годовой ренты может быть определена по формуле:

$$PV = \lim_{n \rightarrow \infty} R \times \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = \frac{R}{r}. \quad (5.37)$$

Современная величина бесконечной общей ренты может быть оп-

ределена по формуле:

$$PV = \lim_{n \rightarrow \infty} R \times \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \times n}}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]} = \frac{R}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]}. \quad (5.38)$$

Пример 5.11. Требуется выкупить вечную ренту при условии, что в конце каждого месяца выплачивается 2 млн руб., проценты в размере 10 % годовых начисляются один раз в квартал.

$$PV = \frac{2 \times 12}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{3/12} - 1 \right]} = 323,1 \text{ млн руб.}$$

Отложенная рента. Начало отложенной или отсроченной ренты отодвигается от момента заключения сделки на какой-то момент в будущем. Нарощенная сумма такой ренты может быть определена по известным формулам. Современную величину такой ренты определяют в два этапа: сначала находят современную величину ренты на момент ее начала, а затем с помощью дисконтирования этой величины в течение срока задержки приводят ее к моменту заключения договора.

Например, если современная величина ренты на момент ее начала равна PV , то современная величина отложенной ренты на t лет составит:

$$PV_t = PV \times v^t, \quad (5.39)$$

где v^t - дисконтный множитель за t лет, $v = \frac{1}{1+r} < 1$.

Пример 5.12. Определить современную стоимость ренты, отложенной на полтора года. Рента имеет следующие параметры: ежемесячно выплачивается 200 тыс. руб., срок ренты 5 лет, проценты в размере 15 % годовых начисляются ежеквартально.

$$PV = 200 \times 12 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{-4 \times 5}}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4/12} - 1 \right]} = 8441,091 \text{ тыс. руб.}$$

$$PV_{1,5} = 8441,091 \times (1 + 0,15)^{-1,5} = 6844,659 \text{ тыс. руб.}$$

Рента пренумерандо. Рента пренумерандо представляет собой ренту, в которой платежи производятся в начале каждого периода. Различие между рентами постнумерандо и пренумерандо заключается лишь в том, что у последней на один период начисления процентов больше. В дальнейшем обозначать ренты постнумерандо и пренумерандо будем pst и pre соответственно.

Формула оценки конечной годовой ренты постнумерандо по схеме наращенная имеет следующий вид:

$$FV_{pst} = R \times (1 + r)^{n-1} + R \times (1 + r)^{n-2} + \dots + R \times (1 + r) + R,$$

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^n R \times (1 + r)^{n-k}. \quad (5.40)$$

В случае если рента представляет собой аннуитет, расчетная формула по схеме наращенная выглядит следующим образом:

$$FV_{pst} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (5.41)$$

Формула оценки конечной годовой ренты постнумерандо по схеме дисконтирования имеет следующий вид:

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^n \frac{R}{(1+r)^k}. \quad (5.42)$$

Формула оценки конечной годовой ренты постнумерандо в виде аннуитета по схеме дисконтирования имеет следующий вид:

$$PV_{pst} = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}. \quad (5.43)$$

Оценка наращенной и приведенной стоимости ренты пренумерандо производится на основе соответственно наращенной и приведенной стоимости ренты постнумерандо. Так как у ренты пренумерандо на один период начисления процентов больше, наращенная и приведенная стоимость ренты определяется по следующим формулам:

$$FV_{pre} = FV_{pst} \times (1+r) = R \times \sum_{k=1}^n (1+r)^k, \quad (5.44)$$

$$PV_{pre} = PV_{pst} \times (1+r) = R \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^{k-1}}. \quad (5.45)$$

Оценку конечной годовой ренты пренумерандо в виде аннуитета по схеме наращенния можно рассчитать по формуле:

$$\begin{aligned} FV_{pre} &= FV_{pst} \times (1+r) = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r) = \\ &= R \times \left[(1+r)^n - 1 \right] \times \frac{1+r}{r}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Формула оценки конечной годовой ренты пренумерандо в виде аннуитета по схеме дисконтирования имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} PV_{pre} &= PV_{pst} \times (1+r) = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \times (1+r) = \\ &= R \times \left[1 - (1+r)^{-n} \right] \times \frac{1+r}{r}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Аналогично выводятся формулы оценки конечной общей ренты пренумерандо.

Оценку конечной общей ренты пренумерандо (аннуитета) по схеме наращенния можно рассчитать по формуле:

$$FV_{pre} = R \times \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \times n} - 1}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]} \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q}. \quad (5.48)$$

Оценку конечной общей ренты пренумерандо (аннуитета) по схеме дисконтирования можно определить по формуле:

$$PV_{pre} = R \times \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \times n}}{q \times \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{q}} - 1\right]} \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q}. \quad (5.49)$$

Пример 5.13. Рассчитать наращенную и современную стоимость ренты пренумерандо по следующим данным: годовой платеж 3 млн руб. выплачивается равными платежами раз в квартал, срок ренты 8 лет, процентная годовая ставка 12 % годовых, проценты начисляются раз в полгода.

$$FV_{pre} = 3 \times \frac{\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \times 8} - 1}{4 \times \left[\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2/4} - 1\right]} \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2/4} = 40,233 \text{ млн руб.}$$

$$PV_{pre} = 3 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{-2 \times 8}}{4 \times \left[\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2/4} - 1\right]} \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2/4} = 15,838 \text{ млн руб.}$$

В случае бессрчного аннуитета поток равных платежей через равные интервалы в течение длительного периода времени рассматривается как бесконечный. При этом подразумевается, что в рамках выбранного интервала осуществляется только один платеж. В этой связи бессрчный аннуитет математически можно представить как бесконечность ($n \rightarrow \infty$) или бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

В отличие от других денежных потоков, которые можно рассчитывать как по схеме наращения, так и по схеме дисконтирования, оценка бессрчного аннуитета способом наращения не имеет смысла, так как поток стремится к бесконечности и нельзя определить n . При этом сначала рассчитывается приведенная стоимость бессрчного аннуитета постнумерандо (5.41), а затем с его помощью приведенная стоимость бессрчного аннуитета пренумерандо.

Формула оценки бессрчного аннуитета пренумерандо по схеме дисконтирования имеет следующий вид:

$$PV_{pre} = PV_{pst} + R. \quad (5.50)$$

5.6. Переменные денежные потоки

В финансовой и коммерческой деятельности денежные потоки не всегда являются аннуитетами, то есть потоками с одинаковыми платежами и равными периодами между ними. Временные интервалы между последовательными платежами могут быть любыми, так же, как и отдельные элементы потока. Такие денежные потоки называются нерегулярными.

Нерегулярные денежные потоки могут быть вызваны как объективными (например, условия производства и сбыта продукции), так и

случайными факторами.

Оценки приведенной или будущей стоимости денежных потоков в этом случае получают только путем прямого счета.

Оценки нерегулярных денежных потоков также можно рассчитать как потоки пренумерандо и постнумерандо, в том числе по схеме наращения и дисконтирования. При этом следует помнить, что поток пренумерандо рассчитывается на основе потока постнумерандо.

При оценке потока постнумерандо по схеме наращения нужно иметь в виду, что на все элементы денежного потока с неравными поступлениями постнумерандо, за исключением последнего, начисляются сложные проценты. Тогда наращенная стоимость денежного потока с неравными поступлениями постнумерандо вычисляется по следующей формуле:

$$FV_{pst} = R_1 \times (1 + r)^{n-1} + \times (1 + r)^{n-2} + \dots + R_{n-1} \times (1 + r) + R_n$$

или

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^n R_k \times (1 + r)^{n-k} . \quad (5.51)$$

Оценка потока постнумерандо по схеме дисконтирования предполагает суммирование элементов приведенного денежного потока. При этом полученная сумма характеризует приведенную или текущую стоимость денежного потока, которую при необходимости можно сравнить с величиной первоначально вложенных средств.

$$PV_{pst} = R_1 \times (1 + r)^{-1} + R_2 \times (1 + r)^{-2} + \dots$$

$$+ R_{n-1} \times (1 + r)^{-(n-1)} + R_n \times (1 + r)^{-n}$$

или

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^n R_k \times (1 + r)^{-k} . \quad (5.52)$$

Будущая стоимость исходного денежного потока пренумерандо по схеме наращения рассчитывается по следующей формуле:

$$FV_{pre} = \sum_{k=1}^n R_k \times (1 + r)^k . \quad (5.53)$$

Современная стоимость денежного потока пренумерандо по схеме

дисконтирования рассчитывается по следующей формуле:

$$PV_{pre} = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^{k-1}}. \quad (5.54)$$

Рассмотрим переменную ренту с разовыми изменениями размеров платежа. Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью $n_1, n_2, \dots, n_k$, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t , но изменяется от участка к участку, где $t = 1, 2, \dots, k$ - номер участка. Тогда наращенная сумма для конечной годовой ренты постнумерандо вычисляется по формуле:

$$FV_{pst} = R_1 \times s_{n_1, r} \times (1+r)^{n-n_1} + R_2 \times s_{n_2, r} \times (1+r)^{n-(n_1+n_2)} + \dots + R_k \times s_{n_k, r}. \quad (5.55)$$

Современная стоимость конечной годовой ренты постнумерандо будет равна:

$$PV_{pst} = R_1 \times p_{n_1, r} + R_2 \times p_{n_2, r} \times v^{n_1} + \dots + R_k \times p_{n_k, r} \times v^{n-n_k}. \quad (5.56)$$

Частным случаем нерегулярного денежного потока является переменная рента. У такой ренты элементы денежного потока изменяются по определенным законам или установленным правилам.

Рассмотрим ренту с постоянным абсолютным изменением платежей. Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом c (положительным или отрицательным). При ренте постнумерандо размеры последовательных платежей составят $R, R+c, R+2 \times c, \dots, R+(n-1) \times c$. Величина k -го члена равна $R_k = R + (k-1) \times c$.

Определим приведенную стоимость денежного потока.

$$PV = R \times v + (R+c) \times v^2 + \dots + [R + (n-1) \times c] \times v^n. \quad (5.57)$$

Умножим полученное равенство на $(1+r)$ и вычтем из полученного выражения равенство (5.57). В результате получим:

$$PV \times r = R + c \times v + c \times v^2 + \dots + c \times v^{n-1} - c \times v^n - (n-1) \times c \times v^n. \quad (5.58)$$

Тогда современная стоимость ренты постнумерандо будет равна:

$$PV_{pst} = \left(R + \frac{c}{r}\right) \times p_{n,r} - \frac{n \times c \times v^n}{r}. \quad (5.59)$$

Наращенную стоимость этой ренты можно получить, если умножить (5.59) на $(1+r)^n$. Тогда наращенная стоимость ренты постнумерандо будет равна:

$$FV_{pst} = \left(R + \frac{c}{r}\right) \times s_{n,r} - \frac{n \times c}{r}. \quad (5.60)$$

Пример 5.14. Определить наращенную и современную стоимость ренты, первый член которой равен 5 млн руб. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 2 млн руб. Проценты начисляются по ставке 15 %. Срок ренты 8 лет.

$$s_{8;15} = \frac{(1+0,15)^8}{0,15} = 20,393;$$

$$FV_{pst} = \left(5 + \frac{2}{0,15}\right) \times 20,393 - \frac{8 \times 2}{0,15} = 267,2 \text{ млн руб.};$$

$$p_{8;15} = \frac{1 - (1+0,15)^{-8}}{0,15} = 4,487;$$

$$PV_{pst} = \left(5 + \frac{2}{0,15}\right) \times 4,487 - \frac{8 \times 2 \times (1+0,15)^{-8}}{0,15} = 47,391 \text{ млн руб.}$$

Размер абсолютного прироста влияет на темп изменения приведенной и наращенной стоимости ренты. Из (5.59) следует, что приведенная стоимость ренты линейно зависит от величины c . Тогда уравнение, описывающее процесс изменения приведенной стоимости ренты, будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} PV_{pst} &= R + b \times c = \left(R + \frac{c}{r}\right) \times p_{n,r} - \frac{n \times c \times v^n}{r} = \\ &= R \times p_{n,r} + \left(\frac{c}{r} \times p_{n,r} - \frac{n \times c \times v^n}{r}\right) = R \times p_{n,r} + c \times \left(\frac{p_{n,r} - n \times v^n}{r}\right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Уравнение, описывающее процесс изменения наращенной стоимости ренты, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}
FV_{pst} &= R + b \times c = \left(R + \frac{c}{r}\right) \times s_{n,r} - \frac{n \times c}{r} = \\
&= R \times s_{n,r} + \left(\frac{c}{r} \times s_{n,r} - \frac{n \times c}{r}\right) = R \times s_{n,r} + c \times \left(\frac{s_{n,r} - n}{r}\right).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

В формулах (5.61) и (5.62) виден вклад первого платежа, он равен R , и вклад прироста платежей ($b \times c$) в изменение приведенной и наращенной стоимости ренты.

Для ренты пренумерандо расчетные формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
PV_{pre} &= \left[\left(R + \frac{c}{r}\right) \times p_{n,r} - \frac{n \times c \times v^n}{r} \right] \times (1+r) = \\
&= R \times p_{n,r} \times (1+r) + c \times \left[\frac{p_{n,r} \times (1+r)}{r} - \frac{n \times v^n \times (1+r)}{r} \right] = \\
&= R \times p_{n,r} \times (1+r) + c \times \left[\frac{p_{n,r} \times (1+r) - n \times v^{n-1}}{r} \right],
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
FV_{pre} &= \left[\left(R + \frac{c}{r}\right) \times s_{n,r} - \frac{n \times c}{r} \right] \times (1+r) = \\
&= R \times s_{n,r} \times (1+r) + c \times \left[\frac{s_{n,r} \times (1+r)}{r} - \frac{n \times (1+r)}{r} \right] = \\
&= R \times s_{n,r} \times (1+r) + c \times \left[\frac{(s_{n,r} - n) \times (1+r)}{r} \right].
\end{aligned} \tag{5.64}$$

В некоторых случаях при заключении сделки и предварительном анализе переменной ренты может потребоваться определение величины первого члена ренты или его прироста при заданных других параметрах. Например, если известен размер денежного фонда, который необходимо создать за известный период времени, и требуется разработать план-график платежей. При определении величины первого члена ренты или его прироста можно использовать как схему наращения, так и схему дисконтирования.

Решая (5.59) или (5.60) относительно R , определяем величину первого взноса для ренты постнумерандо:

$$R = \frac{PV_{pst} + \frac{n \times c \times v^n}{r}}{p_{n,r}} - \frac{c}{r}, \quad (5.65)$$

$$R = \frac{FV_{pst} + \frac{n \times c}{r}}{s_{n,r}} - \frac{c}{r}. \quad (5.66)$$

Аналогично определяется размер прироста платежа при заданном первом члене ренты.

Решая (5.59) или (5.60) относительно c , определяем величину прироста платежей для ренты постнумерандо:

$$c = \frac{(PV_{pst} - R \times p_{n,r}) \times r}{p_{n,r} - n \times v^n}, \quad (5.67)$$

$$c = \frac{(FV_{pst} - R \times s_{n,r}) \times r}{s_{n,r} - n}. \quad (5.68)$$

Если платежи осуществляются несколько раз за период с постоянным приростом платежей, то последовательные выплаты будут равны

$R, R + \frac{c}{q}, R + 2 \times \frac{c}{q}, \dots, R + (q \times n - 1) \times \frac{c}{q}$, где c – прирост платежей за год,

R – первый платеж, т.е. $R_k = R + (k - 1) \times \frac{c}{q}$, где k – номер члена ряда, q –

количество платежей за период, $k = 1, 2, \dots, n \times q$. Тогда наращенная стоимость ренты постнумерандо будет равна:

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n \times q} \left(R + \frac{a \times (k-1)}{q} \right) \times (1+r)^{n - \frac{k}{q}}, \quad (5.69)$$

а современная стоимость ренты постнумерандо –

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n \times q} \left(R + \frac{a \times (k-1)}{q} \right) \times \frac{1}{(1+r)^{k/q}}. \quad (5.70)$$

Если платежи годовой конечной ренты изменяются с постоянным темпом роста d , то члены ренты будут представлять собой ряд: $R, R \times d, \dots, R \times d^{n-1}$. Величина k -го члена равна $R_k = R \times d^{k-1}$. Для того

чтобы получить современную величину, продисконтируем этот ряд: $R \times v, R \times d \times v^2, R \times d^{n-1} \times v^n$. В результате получена геометрическая прогрессия с первым членом $R \times v$ и знаменателем $d \times v$. Тогда современная стоимость такой ренты постнумерандо равна:

$$PV_{pst} = R \times v \times \frac{d^n \times v^n - 1}{d \times v - 1} = R \times \frac{d^n \times v^n - 1}{d - (1+r)}, \quad (5.71)$$

а наращенная стоимость ренты постнумерандо равна:

$$\begin{aligned} FV_{pst} &= PV_{pst} \times (1+r)^n = R \times \frac{d^n \times v^n - 1}{d - (1+r)} \times (1+r)^n = \\ &= R \times \frac{d^n - (1+r)^n}{d - (1+r)}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Пример 5.15. Определить наращенную и современную стоимость ренты, первый член которой равен 5 млн руб. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 12 %. Проценты начисляются по ставке 15 %. Срок ренты 8 лет.

$$FV_{pst} = 5 \times \frac{1,12^8 - (1+0,15)^8}{1,12 - (1+0,15)} = 97,176 \text{ млн руб.}$$

$$PV_{pst} = 5 \times \frac{1,12^8 \times (1+0,15)^{-8} - 1}{1,12 - (1+0,15)} = 31,767 \text{ млн руб.}$$

Для получения современной и наращенной стоимости ренты пре-нумерандо надо умножить на $(1+r)$ соответственно формулы (5.71) и (5.72).

Если платежи осуществляются q раз за период, а проценты начисляются один раз в год по ставке r , то последовательность платежей будет представлять собой геометрическую прогрессию вида:

$R, R \times d, \dots, R \times d^{n-1}$, где d – темп роста платежа за период.

Тогда современная стоимость ренты постнумерандо будет равна:

$$PV_{pst} = R \times \frac{d^{n \times q} \times v^n - 1}{d - (1+r)^{1/q}}, \quad (5.73)$$

а наращенная стоимость ренты постнумерандо –

$$FV_{pst} = R \times \frac{d^{n \times q} - (1+r)^n}{d - (1+r)^{1/q}}. \quad (5.74)$$

Пример 5.16. Определить наращенную и современную стоимость ренты, первый член которой равен 5 млн руб. Последующие платежи увеличиваются каждые полгода на 6 %. Проценты начисляются по ставке 15 %. Срок ренты 8 лет.

$$FV_{pst} = 5 \times \frac{1,06^{16} - (1+0,15)^8}{1,06 - (1+0,15)^{0,5}} = 209,471 \text{ млн руб.}$$

$$PV_{pst} = 5 \times \frac{1,06^{16} \times (1+0,15)^{-8} - 1}{1,06 - (1+0,15)^{0,5}} = 68,476 \text{ млн руб.}$$

5.7. Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, т.е. конвертировать ренту. Встречаются несколько типичных ситуаций.

1. Выкуп ренты. Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее современная величина.

Одним из примеров выкупа ренты является совершение цессии (продажа долгового обязательства), когда в финансовой операции участвуют три агента: должник, кредитор (цедент), покупатель долгового обязательства (цессионарий), и долг погашается равномерными платежами за определенный период времени. В случае если кредитору необходимы денежные средства немедленно, то он может продать обязательство должника на согласованных с покупателем условиях. С учетом условий финансовой эквивалентности начальной суммой для переговоров со стороны продавца является современная стоимость ренты (5.17), в соответствии с параметрами которой должно осуществляться погашение долга.

В случае если погашение долга осуществляется отложенной на время t годовой конечной рентой, то расчет современной стоимости ренты осуществляется по формуле (5.39).

В случае если стороны договорились о купле – продаже обязательств с дисконтом, сумма сделки определяется по формуле:

$$PV_{pst} = R \times \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \times (1+r)^{-t} \times (1-d), \quad (5.75)$$

где d – учетная ставка.

Пример 5.17. Ренту продолжительностью 8 лет, с отсрочкой два года с годовым платежом в 6 млн руб., который выплачивается равными ежемесячными суммами, величина ставки процента в размере 12 % годовых, начисляемых ежеквартально, требуется заменить единовременным платежом с дисконтом (учетная ставка 20 %). Определить сумму этого платежа.

$$PV = 6 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{-4 \times 8}}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4/12} - 1\right]} \times (1 + 0,12)^{-2} \times (1 - 0,2) = 19,702 \text{ млн руб.}$$

2. Рассрочка платежей. Это замена единовременного платежа аннуитетом. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять к величине заменяемого платежа. Далее задача сводится к определению элемента ренты или ее срока при заданных остальных параметрах.

Пример 5.18. Определить срок ренты, заменяющей единовременный платеж в размере 20 млн руб. Параметры ренты такие же, как в примере 5.17. Дисконт отсутствует.

$$\begin{aligned} 20 &= 6 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{-4 \times n}}{12 \times \left[\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4/12} - 1\right]} \times (1 + 0,12)^{-2} = \\ &= 6 \times \frac{1 - \frac{1}{1,03^{4 \times n}}}{0,1188} \times 0,797. \end{aligned}$$

После преобразований получим $1,03^{4 \times n} = 1,987$;

$$n = \frac{\ln 1,987}{4 \times \ln 1,03} = 5,8 \text{ года.}$$

3. Изменение продолжительности ренты. Пусть имеется годовая конечная рента и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, т.е. вместо срока n_1 принят новый срок n_2 . Тогда для эквива-

лентности финансовых результатов требуется и изменение размера платежа. Найдем его из равенства:

$$R_1 \times p_{n_1, r} = R_2 \times p_{n_2, r}, \quad (5.76)$$

из которого следует, что:

$$R_2 = R_1 \times \frac{p_{n_1, r}}{p_{n_2, r}} = R_1 \times \frac{1 - (1 + r)^{-n_1}}{1 - (1 + r)^{-n_2}}. \quad (5.77)$$

4. Замена немедленной ренты на отсроченную. Пусть имеется годовая конечная рента с параметрами R_1, n_1, r и ее необходимо заменить на отсроченную на t лет ренту, т.е. начало выплаты платежей сдвигается на t лет. Обозначим параметры отсроченной ренты как R_2, n_2, r . Ставка процента остается неизменной. Тогда возникает два типа задач.

А. Задан срок n_2 , требуется определить размер платежа R_2 . Исходим из принципа финансовой эквивалентности результата, т.е. из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: $PV_1 = PV_2$. Раскрывая это равенство, получаем:

$$\begin{aligned} R_1 \times p_{n_1, r} &= R_2 \times p_{n_2, r} \times v^t, \\ R_2 &= R_1 \times \frac{p_{n_1, r}}{p_{n_2, r}} \times (1 + r)^t. \end{aligned} \quad (5.78)$$

В частном случае, когда $n_1 = n_2 = n$, решение принимает следующий вид:

$$R_2 = R_1 \times (1 + r)^t.$$

Б. Размеры платежей заданы, требуется определить срок n_2 .

Рассмотрим частный случай, когда платежи конечной годовой ренты остаются неизменными, т.е. $R_2 = R_1 = R$. Исходя из равенства современных стоимостей

$$R \times p_{n_1, r} = R \times p_{n_2, r} \times v^t, \quad (5.79)$$

где $p_{n, r} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$, получим

$$n_2 = \frac{-\ln\{1-[1-(1+r)^{-n_1}]\times(1+r)^t\}}{\ln(1+r)}. \quad (5.80)$$

Пример 5.19. Немедленная рента постнумерандо с годовым платежом в 3 млн руб. и сроком 10 лет откладывается на два года, срок ренты при этом увеличивается на два года, принятая процентная ставка-15% годовых. Определить годовой платеж отсроченной ренты.

$$p_{10,15} = \frac{1-(1+0,15)^{-10}}{0,15} = 5,02;$$

$$p_{12,15} = \frac{1-(1+0,15)^{-12}}{0,15} = 5,42;$$

$$R_2 = 3 \times \frac{5,02}{5,42} \times (1+0,15)^2 = 3,675 \text{ млн руб.}$$

Пример 5.20. Используя условия примера (5.19), определить срок отсроченной ренты, если сумма годового платежа остается неизменной.

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{1-\left[1-(1+0,15)^{-10}\right]\times(1+0,15)^2\right\}}{\ln(1+0,15)} = 38,88 \text{ года.}$$

5. Замена годовой ренты на общую. Имеется годовая рента с параметрами R_1 , n_1 , r , которую по договоренности между контрагентами необходимо заменить на общую ренту с параметрами R_2 , n_2 , r и несколькими платежами в год q . Если заданы срок общей ренты, количество платежей в год и процентная ставка, то годовой платеж ренты можно определить из уравнения эквивалентности $PV_1 = PV_2$ или

$$R_1 \times p_{n_1,r} = R_2 \times p_{n_2,r}^{(q)}.$$

Тогда:

$$R_2 = R_1 \times \frac{p_{n_1,r}}{p_{n_2,r}^{(q)}}. \quad (5.81)$$

Если $n_1 = n_2 = n$, то соотношение коэффициентов дисконтирования ренты будет равно:

$$\frac{p_{n_1,r}}{p_{n_2,r}^{(q)}} = \frac{q \times \left[(1+r)^{1/q} - 1\right]}{r}.$$

Отсюда:

$$R_2 = R_1 \times \frac{q \times \left[(1+r)^{1/q} - 1 \right]}{r}. \quad (5.82)$$

Пример 5.21. Возврат долга осуществляется частями в виде аннуитета с параметрами $R=3$ млн руб., $n=3$ года, $r=12\%$ годовых. Стороны договорились, что платежи будут осуществляться раз в квартал.

Так как срок ренты не изменился, то годовой платеж можно определить по формуле (5.82):

$$R_2 = R_1 \times \frac{q \times \left[(1+r)^{1/q} - 1 \right]}{r} = 3 \times \frac{4 \left[(1+0,12)^{1/4} - 1 \right]}{0,12} = 2,874 \text{ млн руб.}$$

Предположим, что стороны договорились дополнительно об изменении срока возврата долга до 4 лет. Тогда годовой платеж можно определить по формуле (5.81).

$$p_{3,12} = \frac{1 - (1+0,12)^{-3}}{0,12} = 2,4; \quad p_{4,12}^{(4)} = \frac{1 - (1+0,12)^{-4}}{4 \left[(1+0,12^{1/4}) - 1 \right]} = 3,17;$$

$$R_2 = R_1 \times \frac{p_{n1,r}}{p_{n2,r}^{(q)}} = 3 \times \frac{2,4}{3,17} = 2,271 \text{ млн руб.}$$

6. Общий случай изменения параметров ренты. В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты исходим из равенства $PV_1 = PV_2$. Если рассматривается общая конечная рента, то приходим к формуле:

$$PV_1 = R_2 \times \frac{1 - \left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{-m_2 \times n_2}}{q_2 \times \left[\left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2/q_2} - 1 \right]} \times \left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{-t \times m_2}, \quad (5.83)$$

где PV_1 подсчитывается заранее, t – период отсрочки, ряд параметров задается по согласованию сторон и один параметр находится из (5.81).

7. Объединение рент. В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну из принципа финансовой эквивалентности обязательств до и после операции следует, что должно обеспечиваться равенство современных стоимостей заменяющей и объединяемых рент:

$$PV = \sum_k PV_k, \quad (5.84)$$

где PV – современная стоимость заменяющей ренты; PV_k – современная

стоимость k -й объединяемой ренты.

Используя равенство (5.84) и учитывая, что можно определить только один неизвестный параметр, можно по заданным параметрам объединяемых рент и части параметров заменяющей ренты рассчитать годовой платеж, срок, коэффициент дисконтирования заменяющей ренты.

Пример 5.22. Заменить две ренты постнумерандо с годовыми платежами 400 и 500 тыс. руб. и сроками 5 и 6 лет соответственно на отложенную на три года ренту со сроком 8 лет. Процентная ставка 15 % годовых. Определить величину годового платежа заменяющей ренты.

$$PV = PV_1 + PV_2.$$

$$R \times \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \times (1 + r)^{-t} = R_1 \times \frac{1 - (1 + r)^{-n_1}}{r} + R_2 \times \frac{1 - (1 + r)^{-n_2}}{r}.$$

$$R \times \frac{1 - (1 + 0,15)^{-8}}{0,15} \times (1 + 0,15)^{-3} =$$

$$= 400 \times \frac{1 - (1 + 0,15)^{-5}}{0,15} + 500 \times \frac{1 - (1 + 0,15)^{-6}}{0,15}.$$

$$R \times \frac{1 - (1 + 0,15)^{-8}}{0,15} \times (1 + 0,15)^{-3} = 1340,862 + 1892,241.$$

$$R = 3233,103 \times \frac{0,15 \times (1 + 0,15)^3}{1 - (1 + 0,15)^{-8}} = 1095,946 \text{ тыс. руб.}$$

Часто в практических расчетах используют мультиплицирующий и дисконтирующий множители. Для этой цели составляются специальные таблицы мультиплицирующих и дисконтирующих множителей.

Мультиплицирующий множитель $FM_3(n, r)$ характеризует будущую стоимость срочного аннуитета постнумерандо в одну денежную единицу продолжительностью n периодов:

$$FM_3(n, r) = \sum_{i=1}^n (1 + r)^{n-i}. \quad (5.85)$$

Дисконтирующий множитель $FM_4(n, r)$ характеризует приведенную стоимость срочного аннуитета постнумерандо в одну денежную единицу продолжительностью n периодов:

$$FM_4(n, r) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^i}. \quad (5.86)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение денежному потоку.
2. Что такое элемент денежного потока?
3. Что из себя представляет приведенный денежный поток?
4. Дайте классификацию финансовых рент.
5. Дайте определение ренты постнумерандо и ренты пренумерандо.
6. Дайте определение аннуитету.
7. Чем отличаются конечная годовая рента и конечная общая рента?
8. Приведите формулы коэффициентов наращения и дисконтирования годовой конечной ренты постнумерандо.
9. Приведите формулы коэффициентов наращения и дисконтирования годовой конечной ренты пренумерандо.
10. Поясните применение метода линейной интерполяции для определения величины процентной ставки.
11. Поясните метод Ньютона – Рафсона.
12. Что понимается под вечной рентой?
13. Поясните, что из себя представляет отложенная рента.
14. Поясните в чем заключается отличие постоянных и переменных рент.
15. Сформулируйте общий принцип сравнения финансовых потоков.
16. Дайте пример выкупа и рассрочки ренты.
17. Какие задачи могут возникнуть при замене немедленной ренты на отсроченную?
18. Какой принцип лежит в основе расчетов при изменении срока ренты и при объединении рент?
19. Рассчитайте наращенную и приведенную суммы конечной годовой ренты по известным параметрам: срок операции – 5 лет, годовая процентная ставка – 12 %, годового платеж – 50 тыс. руб.
20. Рассчитайте срок конечной годовой ренты по известным параметрам: современная стоимость ренты – 770 тыс. руб., годовая процентная ставка – 15 %, годового платеж – 80 тыс. руб.
21. Рассчитайте годового платеж по известным параметрам конечной годовой ренты: наращенная стоимость ренты – 540 тыс. руб., годовая процентная ставка – 16 %, срок ренты – 6 лет.
22. Определите годовую процентную ставку по известным пара-

метрам конечной годовой ренты: наращенная стоимость ренты – 630 тыс. руб., годовой платеж – 90 тыс. руб., срок ренты – четыре года.

23. Рассчитайте наращенную и приведенную суммы общей конечной ренты по известным параметрам: годовая процентная ставка – 15 %, размер годового платежа – 240 тыс. руб. в год, срок ренты – 8 лет, проценты начисляются ежеквартально, платежи осуществляются ежемесячно.

24. Найдите современную стоимость вечной ренты пренумерандо, если годовой платеж – 20 тыс. руб., платежи производятся раз в полгода, годовая процентная ставка – 12 %, проценты начисляются ежеквартально.

25. Определите наращенную и современную стоимость ренты со следующими параметрами: годовая процентная ставка – 12 %, срок ренты – 8 лет, первый платеж – 12 тыс. руб., каждый последующий платеж увеличивается на 2 тыс. руб.

26. Определите современную стоимость ренты, отложенной на два года. Рента имеет следующие параметры: ежемесячно выплачивается 250 тыс. руб., срок ренты 5 лет, проценты в размере 14 % годовых начисляются ежеквартально.

27. Замените ренту продолжительностью 6 лет, с годовым платежом в 4 млн. руб. и величиной ставки процента в размере 12 % годовых, начисляемых ежеквартально, единовременным платежом. Определить сумму этого платежа.

28. Замените единовременный платеж в размере 5 млн руб. рентой со следующими параметрами: процентная ставка 8 % годовых, срок ренты 4 года, проценты начисляются ежеквартально, платежи осуществляются ежемесячно. Определите недостающий параметр ренты.

29. Определите срок ренты, заменяющей единовременный платеж в размере 20 млн. руб., если годовая процентная ставка 14 %, начисляемая один раз в полгода.

30. Немедленная рента постнумерандо с годовым платежом в 3 млн. руб. и сроком 10 лет откладывается на два года, срок ренты при этом увеличивается на два года, принятая процентная ставка – 15 % годовых. Определите годовой платеж отсроченной ренты.

31. Определите годовой платеж заменяющей ренты, если исходная рента имеет следующие параметры: годовой платеж составляет 200 тыс. руб., срок ренты 10 лет, процентная ставка 8 % годовых, платежи осуществляются ежемесячно. Срок ренты увеличивается до 15 лет.

32. Объедините две ренты постнумерандо со следующими параметрами:

- первая рента – годовой платеж 200 тыс. руб, годовая процентная

ставка 6 %, срок ренты 8 лет, платежи осуществляются ежемесячно;

- вторая рента – годовой платеж 350 тыс. руб., годовая процентная ставка 9 %, срок ренты 10 лет, платежи осуществляются ежеквартально.

Заменяющая рента – процентная ставка 8 % годовых, срок ренты 6 лет, платежи осуществляются ежемесячно.

33. Замените две ренты постнумерандо на отложенную на три года ренту пренумерандо со сроком 9 лет и процентной ставкой 9% годовых. Параметры рент:

- первая рента – годовой платеж 500 тыс. руб., срок ренты 7 лет процентная ставка 8 % годовых, проценты начисляются ежеквартально, платежи осуществляются ежемесячно;

- вторая рента – годовой платеж 600 тыс. руб., срок ренты 8 лет процентная ставка 10 % годовых, проценты начисляются ежемесячно, платежи осуществляются ежеквартально.

ГЛАВА 6. КРЕДИТНЫЕ ОПЕРАЦИИ

6.1. Погашение задолженности частями

Любая финансовая или кредитная операция должна быть сбалансирована. Общая сумма притоков должна уравниваться общей суммой оттоков. На рис. 6.1 показан контур кредитной операции, который иллюстрирует сбалансированность притоков и оттоков операции. На рис. 6.1 K обозначает величину задолженности, R - величину платежей по погашению задолженности и t - периоды времени между отдельными платежами.

На интервале t_1 задолженность возрастает за счет начисления процентов. В конце интервала осуществляется погасительный платеж в размере R_1 и в результате задолженность уменьшается до величины K_1 . Аналогичное действие осуществляется и на интервале t_2 . В конце интервала t_3 осуществляется погасительный платеж R_3 и происходит окончательное погашение задолженности.

Расчеты могут производиться двумя способами: на основе актуарного метода и на основе правила торговца.

Актуарный метод. Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если сумма платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются.

Для случая, показанного на рис. 6.1, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности, используя простые проценты:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \times (1 + t_1 \times r) - R_1, \\ K_2 &= K_1 \times (1 + t_2 \times r) - R_2, \\ K_2 \times (1 + t_3 \times r) - R_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Задолженность в размере 10 млн руб. кредитор обязуется погасить в течение двух лет. Ставка простых процентов 12 % годовых. Продолжительность периодов между платежами не оговаривается. Заем оформлен 01.01.XX года.

Погасительные платежи осуществляются должником в следующие сроки:

1-й платеж – 500 тыс. руб. 01.07.XX года.

Долг с процентами на 01.07.XX года составляет 10 600 000 руб.
 В связи с тем, что платеж меньше суммы начисленных процентов, то он не засчитывается, а будет присоединен к следующему платежу.
 2-й платеж – 4 млн руб. 31.12.XX года.
 Поступления в зачет долга – 4 500 000 руб.
 Долг с процентами на 01.01. X1 года составит 6 700 000 руб.
 3-й платеж – 3 300 000 руб. 01.07.X1 года.
 Долг с процентами на 01.07.X1 года составляет 7 102 000 руб.
 Остаток долга на 01.07.X1 года составит 3 802 000 руб.
 Долг с процентами на 31.12.X1 года составляет 4 030 120 руб.
 Погасительный платеж должен составить 31.12.X1 года 4 030 120 руб.

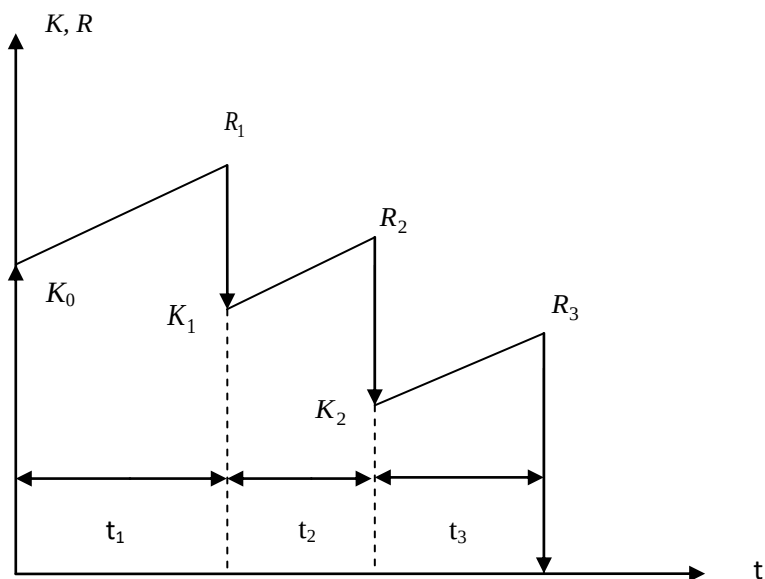


Рисунок 6.1 - Контур кредитной операции при использовании простых процентов

Правило торговца. При применении этого правила возможны две ситуации:

1. Если срок ссуды не превышает год, сумма долга с начисленными процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до

конца срока процентами. Последний платеж должен полностью закрыть долг с процентами.

2. В случае если срок ссуды превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды $T \geq 1$ алгоритм вычислений можно записать следующим образом:

$$S = PV \times (1 + T \times r) - \sum_{j=1}^m R_j \times (1 + t_j \times r), \quad (6.2)$$

где S - остаток долга на конец срока; R_j - сумма частичного платежа; t_j - интервал времени от момента платежа до конца срока; m - число промежуточных платежей; PV - сумма ссуды.

Пример 6.2. Обязательство по оплате долга в размере 2 млн руб. на 1.04. XX года должно быть погашено 1.10.XX года. На сумму долга начисляются проценты в размере 10 % годовых. 15.08.XX года поступил платеж в размере 1,2 млн руб.

Определить остаток долга.

$$S = 2 \times \left(1 + \frac{7}{12} \times 0,1\right) - 1,2 \times \left(1 + \frac{45}{360} \times 0,1\right) = 0,879167 \text{ млн руб.}$$

6.2. Долгосрочные кредиты

Выше отмечалось, что важнейшим условием любой финансовой или кредитной операции является ее сбалансированность.

Рассмотрим баланс долгосрочной финансово-кредитной операции с начислением сложных процентов, которая представлена на рис. 6.2.

Для операции, представленной на рис. 6.2, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \times (1 + r)^{t_1} - R_1, \\ K_2 &= K_1 \times (1 + r)^{t_2} - R_2, \\ K_2 \times (1 + r)^{t_3} - R_3 &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где K_0 - первоначальная сумма долга, R_1 и R_2 - промежуточные платежи, R_3 - последний платеж.

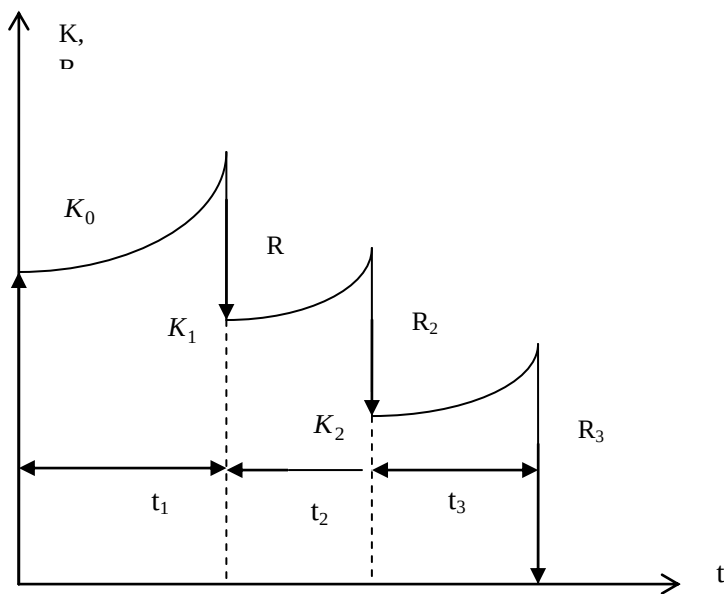


Рисунок 6.2 - Контур кредитной операции при использовании сложных процентов

Последнее уравнение является балансовым. Выразим K_2 через K_0 и подставим его в балансовое уравнение:

$$[(K_0 \times g^{t_1} - R_1) \times g^{t_2} - R_2] \times g^{t_3} - R_3 = 0, \quad (6.4)$$

которое нетрудно привести к следующему виду:

$$K_0 \times g^T - (R_1 \times g^{t_2+t_3} + R_2 \times g^{t_3} + R_3) = 0, \quad (6.5)$$

где $T = \sum t_i, g = 1 + r$.

В уравнении (6.5) представлены два процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок от момента платежа до конца срока операции. Таким образом, полученное уравнение отражает баланс сумм, наращенных на момент времени T . Умножим это уравнение на дисконтный множитель

v^T и получим:

$$K_0 - (R_1 \times v^{t_1} + R_2 \times v^{t_1+t_2} + R_3 \times v^T) = 0. \quad (6.6)$$

В этом виде уравнение выражает равенство суммы современных величин погасительных платежей сумме кредита, т.е. баланс современных величин. Эти уравнения можно обобщить и на случай n погасительных платежей. Если погасительные платежи осуществляются периодически постоянными или переменными суммами, то они образуют постоянную или переменную ренту, параметры которой рассчитываются обычным способом. Такой способ погашения задолженности называется амортизацией долга и может осуществляться двумя способами:

- погашением основного долга равными суммами или долями;
- погашением всей задолженности равными или переменными суммами (срочными выплатами).

Рассмотрим расчеты величины выплат и остатка задолженности при использовании первого способа.

Предположим, что в результате некоторых хозяйственных или финансовых операций сформировался долг в сумме C , который должен быть погашен в течение n лет. Тогда ежегодно выплачиваемая сумма составит $c = C/n$. Размер долга будет ежегодно уменьшаться на одну и ту же величину, и его можно будет представить в следующем виде: $C, C-c, C-2 \times c$ и т.д. Одновременно будут уменьшаться и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток долга. Если процентная ставка равна r , то процентные выплаты составят следующую последовательность $C \times r, (C - c) \times r, (C - 2 \times c) \times r$ и т.д. Эта последовательность платежей представляет собой убывающую арифметическую прогрессию с первым членом $C \times r$ и разностью $-c \times r$. Тогда сумма к уплате в конце первого года составит при $C_0 = C$:

$$Y_1 = C_0 \times r + c. \quad (6.7)$$

Выплата в конце года k составит:

$$Y_k = C_{k-1} \times r + c. \quad (6.8)$$

Остаток долга на конец периода k составит:

$$C_k = C_{k-1} \times \frac{n-k+1}{n-k+2}, \quad (6.9)$$

при $k=1$, $C_{k-1} = C_0$.

При погашении задолженности равными (срочными) суммами

расходы должника постоянны. Общая сумма расходов делится на суммы по погашению процентов и суммы по погашению основного долга. Погашение основного долга осуществляется по остаточному принципу. С каждым периодом величина долга уменьшается, что приводит к уменьшению процентных выплат и увеличению сумм, направляемых на погашение основного долга.

При погашении долга могут задаваться:

- срок погашения долга;
- расходы по погашению долга.

В случае если известен срок погашения долга, то в начале определяется размер срочного платежа, который затем разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение основного долга. Имея эти величины, легко можно определить остаток долга.

Периодическая выплата постоянной суммы равнозначна финансовой ренте с заданными параметрами. Приравнивая сумму долга к современной стоимости этой ренты можно найти величину регулярных срочных выплат.

$$Y = \frac{C}{p_{n,r}}, \quad (6.10)$$

где $p_{n,r}$ - коэффициент дисконтирования ренты продолжительностью n лет и ставкой процента r .

Сумма первого платежа может быть найдена по формуле:

$$c_1 = Y - C_0 \times r. \quad (6.11)$$

Сумма k -го платежа будет равна:

$$c_k = c_{k-1} \times (1+r). \quad (6.12)$$

Платежи по погашению долга образуют ряд: $c_1; c_1 \times (1+r); \dots; c_1 \times (1+r)^{n-1}$.

Тогда сумма погашенной задолженности S на конец года t будет равна:

$$S_k = \sum_{t=0}^{k-1} c_1 \times (1+r)^t = c_1 \times s_{t,r}, \quad (6.13)$$

где $s_{t,r}$ - коэффициент наращивания ренты продолжительностью t и ставкой процента r .

Остаток долга на начало следующего года можно определить по формуле:

$$C_{k+1} = C_k - S_k. \quad (6.14)$$

Пример 6.3. Построить план погашения задолженности в размере 1,5 млн руб. Задолженность необходимо погасить в течение 5 лет. Ставка процента составляет 12 % годовых.

Размер погашения основного долга составляет $c = 1500000 / 5 = 300000$ руб. в год. Выплаты в конце года определяются по формуле (6.10), а остаток долга на конец года по формуле (6.11). План погашения долга представлен в табл. 6.1.

Таблица 6.1 - План погашения долга равными суммами

Год	Остаток долга на начало года	Сумма погаше- ния основной части долга	Сумма погашения процентов		Общая сумма платежа
1	1 500 000	300 000	180 000		480 000
2	1 200 000	300 000	144 000		444 000
3	900 000	300 000	108 000		408 000
4	600 000	300 000	72 000		372 000
5	300 000	300 000	36 000		336 000
Итого		1 500 000	540 000		2 040 000

Пример 6.4. Построить план погашения задолженности в размере 1,5 млн руб. Задолженность необходимо погасить в течение 5 лет. Ставка процента составляет 12 % годовых. Погашение осуществляется равными срочными выплатами.

Найдем коэффициент дисконтирования ренты с параметрами $n=5$, $r=12\%$.

$$p_{n,r} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = \frac{1 - (1+0,12)^{-5}}{0,12} = 3,604776.$$

$$Y = \frac{1500000}{3,604776} = 416114,6 \text{ руб.}$$

Первый платеж определяется по формуле (6.11), а остаток долга на конец года по формуле (6.14). План погашения долга представлен в табл. 6.2.

Если задана величина расходов по погашению долга, то задача заключается в определении срока погашения долга.

Срок погашения долга находится как срок постоянной ренты. В случае годовой ренты постнумерандо срок ренты можно определить по формуле, аналогичной формуле (5.26):

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{C_0}{Y} \times r)}{\ln(1+r)} . \quad (6.15)$$

Решение возможно только в случае, если $\frac{C_0}{Y} \times r < 1$.

Таблица 6.2 - План погашения долга равными срочными выплатами

Год	Остаток долга на начало года	Сумма погашения основной части долга	Сумма погашения процентов	Общая сумма платежа
1	1 500 000	236 114,6	180 000	416 114,6
2	1 263 885,4	264 448,35	151 666,25	416 114,6
3	999 437,05	296 182,15	119 932,45	416 114,6
4	703 254,9	331 724,01	84 390,59	416 114,6
5	371 530,89	371 530,89	44 583,7	416 114,6
Итого		1 500 000	580 573	2 080 573

Пример 6.5. Определить срок погашения долга в размере 1,5 млн руб. Для погашения долга ежегодно планируется выделять 400 тыс. руб. Ставка процента составляет 12% годовых.

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{1500000}{400000} \times 0,12)}{\ln(1+0,12)} = 5,28 \text{ года.}$$

Аналогично можно рассчитать срок погашения долга, если выплаты осуществляются несколько раз в год.

6.3. Ссудные и учетные операции с удержанием комиссионных

При осуществлении ссудных операций за открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые повышают доходность операций с его стороны, так как размер фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n и при ее выдаче из нее удерживаются комиссионные в размере L . Фактически выданная ссуда равна $D - L$.

В случае начисления простых процентов балансовое уравнение имеет вид:

$$D \times (1 - l) \times (1 + n \times r_l) = D \times (1 + n \times r) . \quad (6.16)$$

Преобразовав балансовое уравнение, найдем r_l :

$$r_l = \frac{1+n \times r}{(1-l) \times n} - \frac{1}{n}, \quad (6.17)$$

где l - относительная величина комиссионных в сумме кредита, т.е. $L = D \times l$; r_l - фактическая доходность, выраженная через ставку простых процентов.

При долгосрочных операциях со сложными процентами с удержанием комиссионных балансовое уравнение имеет вид:

$$(D-L) \times (1+r_l)^n = D \times (1+r)^n, \quad (6.18)$$

тогда $D \times (1-l) \times (1+r_l)^n = D \times (1+r)^n$.

Отсюда

$$r_l = \frac{1+r}{\sqrt[n]{1-l}} - 1. \quad (6.19)$$

Пример 6.6. Определить эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов. Ссуда выдана на 180 дней под 9 % годовых, кредитором удержаны комиссионные в размере 0,6 % от суммы кредита.

Эффективность ссудной операции определяем с использованием формулы (6.19).

$$r_l = \frac{1+0,09}{\sqrt[365]{1-0,006}} - 1 = 0,103 \text{ или } 10,3 \% \text{ годовых.}$$

Подобные вычисления осуществляются и при учетных операциях.

Пусть при учете применяется простая учетная ставка. После удержания комиссионных и дисконта заемщик получает сумму $D - D \times n \times d - L$ или $D \times (1 - n \times d - l)$.

Балансовое уравнение будет иметь вид:

$$D \times (1 - n \times d - l) \times (1 + n \times r_l) = D. \quad (6.20)$$

Отсюда полная доходность будет равна:

$$r_l = \frac{1}{(1 - n \times d - l) \times n} - \frac{1}{n}. \quad (6.21)$$

При долгосрочных операциях со сложными учетными ставками с удержанием комиссионных балансовое уравнение имеет вид:

$$(D-L) \times (1+r_l)^n = D \times (1-d)^n, \quad (6.22)$$

тогда

$$D \times (1-l) \times (1+r_l)^n = D \times (1-d)^n. \quad (6.23)$$

Отсюда

$$r_l = \frac{1-d}{\sqrt[n]{1-l}} - 1. \quad (6.24)$$

Надо иметь в виду, что при учетных операциях n - это период времени от момента учета до конца операции.

Пример 6.7. Вексель учтен за 90 дней до его предъявления к оплате по простой учетной ставке 20 %. При учете с владельца векселя была удержана комиссия в размере 2 % от номинала векселя. Определить эффективность операции при применении немецкой практики.

Используя формулу (6.24), находим:

$$r_l = \frac{1}{\left(1 - \frac{90}{360} \times 0,2 - 0,02\right) \times \frac{90}{360}} - \frac{1}{\frac{90}{360}} = 0,301 \text{ или } 30,1 \% \text{ годовых.}$$

6.4. Льготные займы и кредиты

В некоторых случаях долгосрочные займы и кредиты выдаются заемщикам на льготных условиях. Низкая процентная ставка по сравнению с рыночной в сочетании с большим сроком и наличием льготного периода дает должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Такие субсидии предоставляются развивающимся странам в рамках финансовой помощи, а также отдельным отраслям, регионам и предприятиям внутри страны. Определение размера этой помощи сводится к оценке грант-элемента.

Грант-элемент – это условная субсидия кредитора, связанная с применением более низкой, чем на рынке, процентной ставкой. Грант-элемент определяется в виде абсолютной и относительной величины.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность суммы займа и современной величины платежей по погашению займа. Для расчетов обычно берут процентную ставку, сложившуюся на рынке долгосрочных кредитов.

Абсолютный грант-элемент находится как:

$$W = K - G. \quad (6.25)$$

Относительный грант-элемент определяется по следующей фор-

муле:

$$w = \frac{W}{K} = 1 - \frac{G}{K}, \quad (6.26)$$

где W - абсолютный грант-элемент; w - относительный грант-элемент; K - сумма кредита; G - современная величина платежей, рассчитанная по реальной ставке процента на рынке кредитов.

Предположим, заем выдан на n лет по ставке g процентов годовых. На финансовом рынке аналогичные по сроку и объему займы выдаются в среднем под r процентов годовых. Тогда срочная величина выплат по займу составит:

$$Y = \frac{K}{p_{n,g}}. \quad (6.27)$$

Современная величина всех выплат по займу, рассчитанная по рыночной ставке процента, будет равна:

$$G = Y \times p_{n,r}. \quad (6.28)$$

Теперь можно определить величины абсолютного и относительного грант-элементов:

$$W = K - Y \times p_{n,r} = K - \frac{K}{p_{n,g}} \times p_{n,r} = K \times \left(1 - \frac{p_{n,r}}{p_{n,g}} \right); \quad (6.29)$$

$$w = 1 - \frac{p_{n,r}}{p_{n,g}}. \quad (6.30)$$

Абсолютный и относительный грант-элементы могут быть рассчитаны только при условии $r > g$.

Пример 6.8. Рассчитать абсолютный и относительный грант-элементы для займа, выданного на 12 лет под 3 % годовых. Сумма займа равна 20 млн руб. Средняя рыночная ставка процента по аналогичным займам составляет 9 % годовых. Погашение займа осуществляется равными срочными выплатами.

$$w = 1 - \frac{p_{12,9}}{p_{12,3}} = 1 - \frac{\left[1 - (1 + 0,09)^{-12} \right] \times 0,03}{\left[1 - (1 + 0,03)^{-12} \right] \times 0,09} = 0,282.$$

$$W = 20 \times 0,282 = 5,64 \text{ млн руб.}$$

6.5. Форфейтная кредитная операция

Эта операция получила распространение во внешней торговле, но может применяться и при операциях на внутреннем рынке. Потребность в такой операции возникает тогда, когда покупатель не имеет средств на покупку товара в настоящее время, а продавец также не может отпустить товар в кредит.

Суть этой операции в следующем. В рамках форфейтной операции покупатель при совершении сделки выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который формально предоставляется продавцом покупателю. Сроки оборота векселей равномерно распределены во времени обычно через равные интервалы.

Продавец сразу же после получения комплекта векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая всю сумму денежных средств за товар. Банк, форфейтируя сделку, берет весь риск на себя. В сделке может присутствовать и четвертое лицо – банк покупателя, который гарантирует сделку. Платежи по векселям представляют собой постоянную ренту, и расчет таких операций осуществляется по уже известным формулам.

При осуществлении операции форфейтинга продавец должен при учете векселей получить сумму, равную цене товара. Вексельная сумма состоит из двух элементов: основного долга и суммы процентов за предоставленный кредит. Сумма процентов может определяться двумя способами:

- начислением процентов на остаток задолженности;
- начислением процентов на сумму долга, включенную в вексель.

В первом случае срок, за который начисляются проценты, начинается с момента погашения предыдущего векселя.

Предположим, что погашение основного долга осуществляется равными суммами. Тогда основная сумма в каждом векселе будет равна P/n . Здесь P - цена товара, n - число векселей или число периодов времени. Проценты за кредит образуют ряд:

$$P \times \frac{r}{m}, P \times \frac{r}{m} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots, P \times \frac{r}{m} \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \dots, \frac{P}{n} \times \frac{r}{m}, \quad m = \frac{T}{t}, \quad (6.31)$$

где $k=1,2,\dots,n$; r - простая годовая процентная ставка; t - продолжительность периода, на который выписан каждый вексель в днях; T - количество дней в году.

Сумма векселя, который погашается в момент времени k , будет равна:

$$FV_k = \frac{P}{n} + P \times \frac{r}{m} \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{P}{n} \times \left[1 + (n-k+1) \times \frac{r}{m}\right]. \quad (6.32)$$

Общая сумма начисленных процентов будет равна:

$$P \times \frac{r}{m} \times \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{n+1}{2} \times P \times \frac{r}{m}. \quad (6.33)$$

Сумма портфеля векселей составит:

$$\sum FV_k = P \times \left(1 + \frac{n+1}{2} \times \frac{r}{m}\right). \quad (6.34)$$

Во втором случае:

$$FV_k = \frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m}\right). \quad (6.35)$$

Сумма процентов за весь срок операции будет равна:

$$\sum FV_k - P = \sum_{k=1}^n \left[\frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m}\right) - \frac{P}{n} \right] = \frac{n+1}{2} \times P \times \frac{r}{m}. \quad (6.36)$$

Полученный результат соответствует формуле (6.32).

Пример 6.9. В уплату за товар, цена которого составляет 2 млн руб., выписано 4 векселя с полугодовым предъявлением к оплате. Ставка простых процентов за кредит 12 % годовых.

Первый способ:

$$FV_1 = \frac{2}{4} \times \left[1 + (4-1) \times \frac{0,12}{2}\right] = 0,62 \text{ тыс. руб.}$$

$$\text{Сумма процентов } Ex_1 = 2 \times \frac{0,12}{2} \times \left(1 - \frac{1-1}{4}\right) = 0,12 \text{ млн руб.}$$

$$FV_2 = \frac{2}{4} \times \left[1 + (4-2+1) \times \frac{0,12}{2}\right] = 0,59 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_2 = 2 \times \frac{0,12}{2} \times \left(1 - \frac{2-1}{4}\right) = 0,09 \text{ млн руб.}$$

$$FV_3 = \frac{2}{4} \times \left[1 + (4-3+1) \times \frac{0,12}{2}\right] = 0,56 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_3 = 2 \times \frac{0,12}{2} \times \left(1 - \frac{3-1}{4}\right) = 0,06 \text{ млн руб.}$$

$$FV_4 = \frac{2}{4} \times \left[1 + (4-4+1) \times \frac{0,12}{2}\right] = 0,53 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_4 = 2 \times \frac{0,12}{2} \times \left(1 - \frac{4-1}{4}\right) = 0,03 \text{ млн руб.}$$

Общая сумма векселей $FV_{\Sigma} = 2,3$ млн руб., в том числе проценты $Ex_{\Sigma} = 0,3$ млн руб.

Второй способ:

$$FV_1 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 1 \times \frac{0,12}{2}\right) = 0,53 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_1 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 1 \times \frac{0,12}{2}\right) - \frac{2}{4} = 0,03 \text{ млн руб.}$$

$$FV_2 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 2 \times \frac{0,12}{2}\right) = 0,56 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_2 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 2 \times \frac{0,12}{2}\right) - \frac{2}{4} = 0,06 \text{ млн руб.}$$

$$FV_3 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 3 \times \frac{0,12}{2}\right) = 0,59 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_3 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 3 \times \frac{0,12}{2}\right) - \frac{2}{4} = 0,09 \text{ млн руб.}$$

$$FV_4 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 4 \times \frac{0,12}{2}\right) = 0,62 \text{ млн руб.}$$

$$Ex_4 = \frac{2}{4} \times \left(1 + 4 \times \frac{0,12}{2}\right) - \frac{2}{4} = 0,12 \text{ млн руб.}$$

Общая сумма векселей $FV_{\Sigma} = 2,3$ млн руб., в том числе проценты $Ex_{\Sigma} = 0,3$ млн руб.

Общая сумма векселей и процентов в обоих случаях одинакова, но проценты в первом случае уменьшаются от платежа к платежу, а во втором случае увеличиваются.

При учете портфеля векселей в банке продавец получит сумму

FV'_Σ , величина которой определяется как современная величина всех платежей по векселям по формуле:

$$FV'_\Sigma = \sum_{k=1}^n FV_k \times \left(1 - k \times \frac{d}{m}\right). \quad (6.37)$$

Однако сумма FV'_Σ будет отличаться от цены товара, так как при учете банк взимает некоторую сумму, чтобы извлечь доход или, по крайней мере, компенсировать потери. В связи с этим, чтобы избежать потерь, продавец вынужден корректировать цену продажи товара в сторону увеличения.

Так как вексельная сумма определяется двумя способами, то и корректировку цены будем определять в соответствии с ними.

При применении первого способа вексельная сумма FV'_Σ может быть определена по формуле:

$$FV'_\Sigma = \sum_{k=1}^n \frac{P}{n} \left[1 + (n - k + 1) \times \frac{r}{m} \right] \times \left(1 - k \times \frac{d}{m} \right). \quad (6.38)$$

Если $\sum_{k=1}^n \left[1 + (n - k + 1) \times \frac{r}{m} \right] \times \left(1 - k \times \frac{d}{m} \right)$ меньше 1, то продавец получит сумму, которая будет меньше цены по контракту.

Относительная величина потерь продавца составит:

$$\Delta_{отн} = \frac{FV'_\Sigma}{P}. \quad (6.39)$$

Тогда скорректированная вексельная сумма каждого векселя, которая исключает потери продавца, будет определяться как:

$$FV_k^{кор} = \frac{P}{n} \times \frac{1}{\Delta_{отн}}. \quad (6.40)$$

Пример 6.10. Определить скорректированные вексельные суммы, если учетная ставка 11 % годовых. Использовать исходные данные из примера 6.9.

$$FV_\Sigma = 2 \times \left(1 + \frac{4+1}{2} \times \frac{0,12}{2} \right) = 2,3 \text{ млн руб.}$$

$$FV'_\Sigma = \frac{2}{4} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[1 + (4 - 1 + 1) \times \frac{0,12}{2} \right] \times \left(1 - 1 \times \frac{0,11}{2} \right) + \\ & + \left[1 + (4 - 2 + 1) \times \frac{0,12}{2} \right] \times \left(1 - 2 \times \frac{0,11}{2} \right) + \\ & + \left[1 + (4 - 3 + 1) \times \frac{0,12}{2} \right] \times \left(1 - 3 \times \frac{0,11}{2} \right) + \\ & + \left[1 + (4 - 4 + 1) \times \frac{0,12}{2} \right] \times \left(1 - 4 \times \frac{0,11}{2} \right) \end{aligned} \right\} =$$

=1,9929 млн руб.

$$\Delta_{omn1} = \frac{1,9929}{2} = 0,99645.$$

$$FV^{kop}_1 = 0,62 \times \frac{1}{0,99645} = 0,6222 \text{ млн руб.}$$

$$FV^{kop}_2 = 0,59 \times \frac{1}{0,99645} = 0,5921 \text{ млн руб.}$$

$$FV^{kop}_3 = 0,56 \times \frac{1}{0,99645} = 0,562 \text{ млн руб.}$$

$$FV^{kop}_4 = 0,53 \times \frac{1}{0,99645} = 0,5319 \text{ млн руб.}$$

Общая сумма векселей составит $FV^{kop}_\Sigma = 2,3082$ млн руб.

Учет этих векселей по учетной ставке 11 % годовых даст сумму примерно равную 2 млн руб.

При применении второго способа вексельная сумма каждого k -го векселя определяется по следующей формуле:

$$FV_k = \frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m} \right). \quad (6.41)$$

Общая сумма векселей будет равна:

$$FV_\Sigma = \sum_{k=1}^n \frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m} \right). \quad (6.42)$$

Сумма, которую получит продавец при учете векселя банком, будет равна:

$$FV'_k = \frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m}\right) \times \left(1 - k \times \frac{d}{m}\right). \quad (6.43)$$

Общая сумма, которую получит продавец при учете векселей банком, будет равна:

$$FV'_\Sigma = \sum_{k=1}^n \frac{P}{n} \times \left(1 + k \times \frac{r}{m}\right) \times \left(1 - k \times \frac{d}{m}\right). \quad (6.44)$$

Затем для исключения потерь при учете векселей цена должна быть скорректирована с использованием формул (6.39) и (6.40).

Пример 6.11. Используя исходные данные примера 6.9, определить вексельные суммы.

Общая сумма векселей $FV_\Sigma = 2,3$ млн руб.

Общая сумма, которую получит продавец при учете векселей:

$$FV'_\Sigma = \frac{2}{4} \times \left[\begin{aligned} &\left(1 + 1 \times \frac{0,12}{2}\right) \times \left(1 - 1 \times \frac{0,11}{2}\right) + \\ &+ \left(1 + 2 \times \frac{0,12}{2}\right) \times \left(1 - 2 \times \frac{0,11}{2}\right) + \\ &+ \left(1 + 3 \times \frac{0,12}{2}\right) \times \left(1 - 3 \times \frac{0,11}{2}\right) + \\ &+ \left(1 + 4 \times \frac{0,12}{2}\right) \times \left(1 - 4 \times \frac{0,11}{2}\right) \end{aligned} \right] = 1,9755 \text{ млн руб.}$$

$$\Delta_{отн2} = \frac{FV'_\Sigma}{P} = \frac{1,9755}{2} = 0,98775$$

$$FV_1^{кор} = \frac{0,53}{0,98775} = 0,53657 \text{ млн руб.}$$

$$FV_2^{кор} = \frac{0,56}{0,98775} = 0,56695 \text{ млн руб.}$$

$$FV_3^{кор} = \frac{0,59}{0,98775} = 0,59732 \text{ млн руб.}$$

$$FV_4^{кор} = \frac{0,62}{0,98775} = 0,62769 \text{ млн руб.}$$

Общая сумма векселей составит $FV_\Sigma^{кор} = 2,32853$ млн руб.

Учет этих векселей по учетной ставке 11 % годовых даст сумму, примерно равную 2 млн руб.

Как следует из расчетов, цена при использовании второго способа, когда проценты начисляются на сумму долга, включенного в вексель, должна быть несколько больше, чем при первом способе, когда проценты начисляются на остаток долга.

При разработке контрактов, реализуемых по схеме форфейтинга, необходимо учитывать также позицию покупателя и банка - форфейтера. Покупатель стремится снизить свои совокупные издержки. Последовательность погашения векселей можно рассматривать как поток платежей. Тогда совокупные издержки покупателя можно оценить, рассчитав современную величину этого потока платежей. Величина приведенной суммы зависит от количества векселей, процентной ставки и учетной ставки банка.

Для случая когда проценты начисляются на остаток задолженности, современная величина потока платежей по векселям с учетом корректировки определяется по формуле:

$$PV_{\Sigma} = \frac{1}{\Delta_{отн1}} \times \sum_k FV_k \times v^k, \quad (6.45)$$

где v – множитель дисконтирования по рыночной ставке.

Пример 6.12. Определить издержки покупателя, приведенные к моменту совершения хозяйственной операции, если проценты начисляются на остаток задолженности. Использовать условия примера 6.9. Ставку ссудного процента принять равной 14 % годовых.

$$PV_{\Sigma} = \frac{1}{0,99645} \times (0,62 \times 0,877 + 0,59 \times 0,769 + +0,56 \times 0,674 + 0,53 \times 0,592) = 1,695 \text{ млн руб.}$$

Если проценты начисляются на сумму долга, включенную в вексель, то издержки покупателя, приведенные к моменту совершения хозяйственной операции определяются по формуле:

$$PV_{\Sigma} = \frac{1}{\Delta_{отн2}} \times \sum_k FV_k \times v^k. \quad (6.46)$$

Пример 6.13. Определить издержки покупателя, приведенные к моменту совершения хозяйственной операции, если проценты начисляются на сумму долга, включенную в вексель. Использовать условия примера 6.9. Ставку ссудного процента принять равной 14 % годовых.

$$PV_{\Sigma} = \frac{1}{0,98775} \times (0,53 \times 0,877 + 0,56 \times 0,769 + 0,59 \times 0,674 + 0,62 \times 0,592) 1,661 \text{ млн руб.}$$

Банк-форфейтер при обосновании своей позиции определяет ставку сложных процентов, эквивалентную учетной ставке, применяемой при учете комплекта векселей с последовательными сроками погашения. Эффективность операции форфейтинга для банка оценивается именно такой ставкой сложных процентов, которая в свою очередь зависит от величины учетной ставки и количества учитываемых векселей. Чем выше учетная ставка и чем больше количество учитываемых векселей, тем эффективнее операция для банка-форфейтера.

Из содержания форфейтной операции следует, что заинтересованными лицами в повышении эффективности сделки являются три хозяйственных субъекта: продавец, покупатель и банк-форфейтер. Следовательно, операция может быть проведена при определенных компромиссах сторон сделки.

Для продавца важным с точки зрения повышения эффективности операции форфейтинга являются снижение учетной ставки банка, повышение ставки процентов за кредит и уменьшение числа векселей. Для покупателя важными параметрами являются величина учетной ставки и количество векселей. Для банка-форфейтера это – учетная ставка. Комбинируя эти параметры, заинтересованные лица обеспечивают свои интересы при использовании операции форфейтинга.

6.6. Ипотечные ссуды

Ипотека – это ссуда под залог недвижимости, является одним из важнейших источников долгосрочного финансирования. При таких операциях на заложенное имущество накладывается обременение в виде запрета совершать сделки по отчуждению заложенного имущества без разрешения залогодержателя. В результате риски залогодержателя уменьшаются, так как он имеет возможность погасить задолженность заемщика за счет средств, вырученных от реализации заложенного имущества. Сумма ссуды обычно меньше оценочной стоимости заложенного имущества. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения. Поскольку платежи по обслуживанию долга являются регулярными, то и расчет ипотеки сводится к расчету параметров той или иной ренты. Основной задачей является разработка планов погашения и определение остатка задолженности на любой момент времени.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, которые различаются методами погашения задолженности.

Стандартная ипотека. По такой ипотеке заемщик получает от кредитора под залог недвижимости некоторую денежную сумму. Этот кредит он погашает равными, чаще всего ежемесячными платежами вместе с процентами.

Ссуды с ростом платежей. В этом случае предусматривается постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые годы (5-10 лет), а затем погашение производится постоянными взносами. Расчет сводится к применению формул для рент с переменными и постоянными платежами в соответствующие интервалы времени.

Ссуды с периодическим увеличением взносов. Здесь по согласованному графику каждые несколько лет сумма взносов увеличивается. Таким образом, поток платежей представляет собой последовательность постоянных рент.

Ссуда с льготным периодом. При такой ипотеке предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу.

Ссуда с залоговым счетом. В этом случае клиент вносит на специальный (залоговый) счет некоторую сумму денег. На начальном этапе заемщик выплачивает кредитору погасительные взносы в размере, меньшем, чем это требуется по стандартной ипотеке. Недостающие суммы списываются со специального счета.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки. При этой схеме стороны регулярно пересматривают уровень процентной ставки с целью адаптации к условиям рынка.

Ссуда с переменной процентной ставкой. При такой ссуде уровень ставки привязывается к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Чтобы избежать чрезмерных скачков, предусматриваются нижняя и верхняя границы разовых корректировок.

Ипотека с обратным аннуитетом. Такая ипотека предусмотрена для заклада домов пожилыми владельцами (продажа в рассрочку до дожития). Цель такого залога – получение регулярного дохода собственником жилища.

Наиболее распространенной является стандартная ипотека, при которой должник осуществляет равные погасительные взносы. Устанавливаются ежемесячные взносы постнумерандо или пренумерандо и ежемесячная процентная ставка.

При осуществлении ипотеки ее участниками являются три субъекта: продавец, покупатель и кредитор. Продавец получает от покупателя полную стоимость объекта недвижимости, который для осуществления такого платежа получает ссуду под залог объекта и частично привлекает собственные средства.

Задача заключается в определении размера ежемесячного платежа и остатка задолженности.

Погасительные платежи представляют собой постоянную ренту. Для решения задачи приравняем современную величину погасительных платежей сумме ссуды K .

$$K = R \times p_{n,r}^{(q)} = \frac{R}{q} \times \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \times n}}{\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]}. \quad (6.47)$$

Величина ежемесячного взноса составит:

$$\frac{R}{q} = K \times \frac{\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/q} - 1\right]}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-m \times n}}. \quad (6.48)$$

Пример 6.14. Определить сумму ежемесячного платежа по ипотечному кредиту. Ипотека оформлена на десять лет в размере 10 млн руб. Погашение долга ежемесячное, постнумерандо. На остаток долга начисляются проценты по ставке 12 % годовых, проценты начисляются ежемесячно.

$$\frac{R}{q} = 10 \times \frac{\left[\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12/12} - 1\right]}{1 - \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{-12 \times 10}} = 0,121387 \text{ млн руб.}$$

Остаток задолженности можно определить следующим образом. Сумма погашения долга в некоторый, допустим t -й, месяц ипотеки составит:

$$k_t = k_{t-1} \times \left(1 + \frac{r}{m}\right) = k_1 \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t-1}. \quad (6.49)$$

Величина k_1 определяется как разность ежемесячного взноса и величины процентов, уплачиваемых за первый месяц Ex_1 .

$$k_1 = \frac{R}{q} - Ex_1. \quad (6.50)$$

Остаток долга на начало каждого месяца составит $K_{t-1} = K_t - k_t$.

Последовательные суммы погашения долга представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом k_1 и знаменателем $\left(1 + \frac{r}{m}\right)$.

Сумма членов этой прогрессии от начала погашения и по момент времени t равна:

$$\sum k_t = k_1 \times \frac{\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^t - 1\right]}{\frac{r}{m}} = k_1 \times s_{t,r/m}. \quad (6.51)$$

Тогда остаток долга на начало $(t+1)$ -го месяца находим как разность:

$$K_{t+1} = K - \sum k_t. \quad (6.52)$$

Пример 6.15. На основе данных примера 6.14 рассчитать остаток долга на начало 51 месяца ипотеки.

$$k_1 = 0,121387 - 10 \times \frac{0,08}{12} = 0,05472 \text{ млн руб.}$$

$$K_{51} = 10 - 0,05472 \times \frac{\left[\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{50} - 1\right]}{\frac{0,08}{12}} = 6,76709 \text{ млн руб.}$$

6.7. Потребительские кредиты

При оформлении потребительского кредита проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и прибавляются к основному долгу в момент открытия кредита.

Погашение долга производится частями и, как правило, равными суммами на протяжении всего срока кредитования. Тогда годовые расходы по обслуживанию долга можно рассчитать как

$$R = \frac{FV}{n}, \quad (6.53)$$

где FV – наращенная сумма долга с использованием простых процентов; n – период кредитования в годах.

Если в год осуществляется q платежей, то единичная сумма по обслуживанию долга будет равна R/q .

Основной задачей является определение остатка задолженности на любой момент времени срока потребительского кредита. Разобьем сумму расходов по обслуживанию долга на проценты Ex и сумму на погашение основного долга P .

Существует несколько способов оценки остатка задолженности, в том числе равномерное распределение выплаты процентов, правило 78 и др.

При равномерном распределении выплаты процентов величина разового платежа R/q при начислении простых процентов может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{R}{q} = \frac{P \times (1 + n \times r)}{n \times q} = \frac{P}{n \times q} + \frac{P \times r}{q}, \quad (6.54)$$

а при начислении сложных процентов в виде:

$$\frac{R}{q} = \frac{P \times (1 + r)^n}{n \times q} = \frac{P}{n \times q} + \frac{P((1 + r)^n - 1)}{n \times q}. \quad (6.55)$$

Название правила 78 вытекает из суммы порядковых номеров месяцев – она равна 78. В случае годового срока кредита доля процентов в сумме расходов за первый месяц составит $12/78$, за второй месяц – $11/78$, за третий месяц – $10/78$ и т.д. В последний месяц доля процентов составит $1/78$. Таким образом, доля процентов в сумме расходов постоянно убывает, а величина погашения основного долга увеличивается.

Тогда для годового срока потребительского кредита процентный платеж Ex_t в месяц с номером t будет равен:

$$Ex_t = \frac{t}{78} \times P \times r, \quad (6.56)$$

а величина погашения основного долга P_t в месяц с номером t будет равна:

$$P_t = R - Ex_t = \frac{P \times (1 + r)}{12} - \frac{t}{78} \times P \times r, \quad (6.57)$$

где R – величина разового погасительного платежа по обслуживанию долга.

В общем случае, когда потребительский кредит выдан на срок N месяцев, номера месяцев в обратном порядке представляют собой последовательность чисел $N, N-1, N-2, \dots, 1$. Сумма этих чисел будет равна:

$$Q = \sum_{t=1}^N t = \frac{N \times (N+1)}{2}. \quad (6.58)$$

Величина долей от общей суммы начисленных процентов определяется как t/Q .

Тогда процентный платеж в месяц с номером t будет равен:

$$Ex_t = \frac{t}{Q} \times P \times r \times n. \quad (6.59)$$

Пример 6.16. Потребительский кредит в размере 500 тыс. руб. выдан на три года под 8 % годовых при начислении процентов в момент выдачи кредита. Платежи по обслуживанию долга ежемесячные.

Определить величину процентных выплат и величину погашения основного долга в 5-й и 7-й месяц срока кредитования при равномерных выплатах и с применением правила 78.

Общая сумма задолженности составляет:

$$K = 500000 \times (1 + 3 \times 0,1) = 650000 \text{ руб.}$$

Ежемесячная сумма по обслуживанию долга составит:

$$\frac{R}{q} = 650000 / 36 = 18055,55 \text{ руб.}$$

Сумма номеров месяцев составляет:

$$Q = \sum_{t=1}^{36} t = 666.$$

При использовании равномерных выплат процентные платежи составят:

$$Ex_5 = Ex_7 = \frac{500000 \times 0,1}{12} = 4166,7 \text{ руб.}$$

Величина погашения основного долга составит:

$$P_5 = P_7 = \frac{500000}{36} = 13888,9 \text{ руб.}$$

При использовании правила 78 процентные платежи составят:

$$Ex_5 = \frac{32}{666} \times 500000 \times 0,1 \times 3 = 7207,2 \text{ руб.}$$

$$Ex_7 = \frac{30}{666} \times 500000 \times 0,1 \times 3 = 6756,8 \text{ руб.}$$

Величина погашения основного долга составит:

$$P_5 = 18055,55 - 7207,7 = 10847,85 \text{ руб.}$$

$$P_7 = 18055,55 - 6756,8 = 11298,75 \text{ руб.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте характеристику актуарному методу начисления процентов.
2. Что такое контур кредитной операции?
3. Сформулируйте правило торговца.
4. Постройте балансовое уравнение для кредитной операции в общем виде, если применяются простые проценты.
5. Постройте балансовое уравнение для кредитной операции в общем виде, если применяются сложные проценты.
6. В чем отличие способов погашения задолженности (амортизации долга), если погашается основной долг равными суммами или долями и если осуществляется погашение всей задолженности равными или переменными суммами (срочными выплатами)?
7. Что такое эффективность кредитной операции?
8. Дайте характеристику ссудным и учетным операциям с удержанием комиссионных.
9. Дайте характеристику льготным займам и кредитам.
10. Что такое абсолютный и относительный грант-элемент?
11. Дайте характеристику форфейтной кредитной операции.
12. С какой целью в операции форфейтинга применяются векселя?
13. Какими способами может определяться сумма процентов при форфейтинговой операции?
14. Для каких целей при форфейтинговой кредитной операции используется корректировка цены товара?
15. Что такое ипотека?
16. Опишите схему ипотечной кредитной операции.
17. Какие существуют основные виды ипотеки и чем они отличаются друг от друга?
18. Каким образом при ипотеке снижаются риски кредитора?
19. Опишите методику определения погасительных платежей при получении ипотечной ссуды.
20. Дайте характеристику потребительским кредитам, в чем их от-

личие от обычного банковского кредитования?

21. Дайте характеристику правила 78.

22. Постройте балансовое уравнение кредитной операции и определите сумму платежа в конце операции. Сумма кредита 1 000 000 руб., ставка простых процентов 12 % годовых, первый платеж в конце третьего месяца 250 000 руб., второй платеж в конце шестого месяца 600 000 руб., срок финансовой операции 9 месяцев.

23. Постройте балансовое уравнение долгосрочной кредитной операции и определите сумму платежа в конце операции. Сумма кредита 1 000 тыс. руб., платежи осуществляются в конце каждого года, ставка сложных процентов 12 % годовых, срок кредита три года, первый платеж 250 тыс. руб., второй платеж 600 тыс. руб.

24. Постройте план погашения задолженности в размере 2 млн руб. Задолженность необходимо погасить в течение 5 лет. Ставка процента составляет 10 % годовых. Для расчетов использовать способ погашения основного долга равными суммами или долями.

25. Постройте план погашения задолженности в размере 2 млн руб. Задолженность необходимо погасить в течение 5 лет. Ставка процента составляет 10 % годовых. Погашение осуществляется равными срочными выплатами.

26. Определите абсолютный и относительный грант-элементы для займа, выданного на 25 лет под 3 % годовых. Сумма займа равна 800 млн.руб. Средняя рыночная ставка процента по аналогичным займам составляет 6 % годовых. Погашение займа осуществляется равными срочными выплатами.

27. Определить ежемесячный платеж по ипотечному кредиту. Ипотека оформлена на 20 лет в размере 4 млн руб. Погашение долга ежемесячное, постнумерандо. На остаток долга начисляются проценты по ставке 6 % годовых, проценты начисляются ежемесячно.

28. Определить величину процентных выплат и величину погашения основного долга в 3 и 8 месяц срока кредитования при равномерных выплатах и с применением правила 78. Потребительский кредит в размере 300 тыс. руб. выдан на три года под 9 % годовых при начислении процентов в момент выдачи кредита. Платежи по обслуживанию долга ежемесячные.

ГЛАВА 7. ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

7.1. Определение оптимального уровня денежных средств

Предприятие для ведения производственно-хозяйственной деятельности располагает денежными средствами, находящимися на расчетных счетах в коммерческих банках и в кассе. Эти средства необходимы предприятию для совершения текущих платежей по операциям при финансово-хозяйственной деятельности, в том числе при оплате приобретенных сырья и материалов, оборудования, услуг, выплате заработной платы и др. В связи с этим каждое предприятие должно поддерживать необходимый уровень ликвидности, чтобы в каждый момент времени, когда необходимо совершить определенный платеж, у него на расчетных счетах и в кассе имелась достаточная сумма денежных средств.

Средний остаток денежных средств, находящийся в ликвидной форме, приводит к определенным потерям для предприятия, так как оно могло бы разместить эти денежные средства и извлечь определенный доход. В качестве минимального дохода, который предприятие могло бы извлечь при размещении своих денежных средств, принимают доход от инвестирования среднего остатка денежных средств в государственные ценные бумаги, обеспечивающие безрисковые вложения. В связи с этим можно сформулировать задачу оптимизации запаса денежных средств, минимизирующего потери предприятия, для поддержания необходимого уровня ликвидности.

Наибольшее распространение при решении такой задачи получили модель Баумоля и модель Миллера – Орра.

В соответствии с моделью Баумоля предприятие начинает работать, имея определенный запас денежных средств, достаточных для финансирования текущей деятельности в течение некоторого времени (M). Все денежные средства, которые предприятие получает за реализованную продукцию, вкладываются в краткосрочные государственные ценные бумаги. Как только величина денежных средств достигает минимально допустимого уровня, предприятие продает ценные бумаги и тем самым восстанавливает запас денежных средств на первоначальном уровне.

Величина запаса денежных средств вычисляется по формуле:

$$M = \sqrt{\frac{2 \times V \times c}{r}}, \quad (7.1)$$

где V - прогнозируемая потребность в денежных средствах в периоде (год); c - расходы по конвертации ценных бумаг в денежные средства; r - процентная ставка по краткосрочным вложениям в государственные ценные бумаги.

Средний запас денежных средств составит $M / 2$. Общее количество сделок по конвертации ценных бумаг в денежные средства за период равно $k = V / M$. Тогда общие расходы по управлению денежными средствами на основе модели Баумоля составят:

$$C = c \times k + r \times \frac{M}{2}. \quad (7.2)$$

Графическая интерпретация модели Баумоля показана на рис. 7.1.

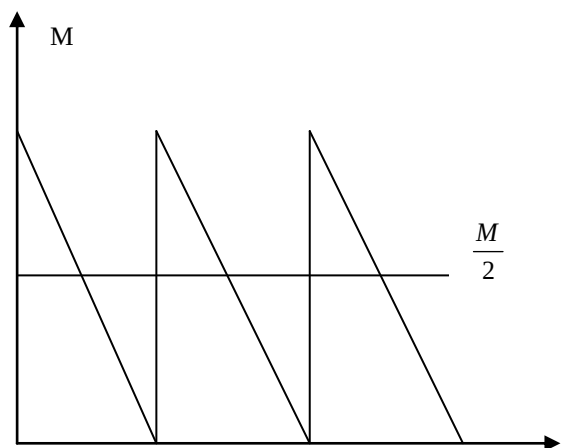


Рисунок 7.1 - Графическое представление модели Баумоля

Серьезный недостаток модели Баумоля состоит в том, что в ней предполагается равномерный расход денежных средств. На практике это невозможно, и поэтому модель Баумоля может использоваться как инструмент приблизительного оценивания необходимого количества денежных средств за период, а не как инструмент управления денежными средствами.

Модель Миллера - Орра является более приемлемой для управления денежными средствами.

При построении модели авторы исходили из того, что предсказать

размеры каждодневных оттоков и притоков денежных средств невозможно, поэтому они использовали подход, когда поступления и расходования денежных средств являются независимыми случайными событиями, что может быть описано процессом Бернулли.

В соответствии с этим подходом остаток денежных средств на расчетном счете меняется случайным образом, пока не достигнет верхнего предела $M_{\max}$. В этот момент предприятие начинает покупать ценные бумаги, для того чтобы вернуть запас денежных средств к нормальному уровню $\bar{M}$. Если запас денежных средств достигает своего минимального значения ($M_{\min}$), предприятие начинает продавать ценные бумаги и восстанавливает нормальный запас денежных средств.

На рисунке модель Миллера - Орра выглядит следующим образом (рис. 7.2).

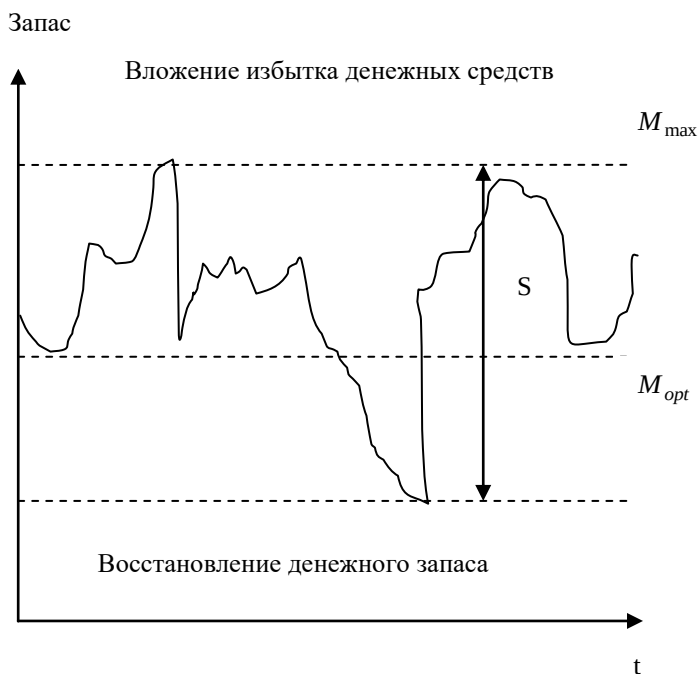


Рисунок 7.2 - Управление денежными средствами на основе модели Миллера - Орра

Алгоритм управления денежными средствами на основе модели Миллера - Орра можно представить в виде последовательности шагов:

1. Экспертным путем задается минимальный уровень запаса денежных средств (M_{min}).

2. По статистическим данным определяется дисперсия σ^2 ежедневных колебаний денежного потока.

3. Определяются расходы r по хранению средств на расчетном счете, которые принимаются равными ставке ежедневного дохода по краткосрочным государственным ценным бумагам, и расходы по конвертации ценных бумаг в денежные средства (c).

4. Рассчитывается размах вариации остатка по формуле:

$$S = 3 \times \sqrt[3]{\frac{3 \times r \times \sigma^2}{4 \times c}}. \quad (7.3)$$

5. Рассчитывается максимальный уровень запаса денежных средств на расчетном счете по формуле:

$$M_{max} = M_{min} + S. \quad (7.4)$$

6. Определяется оптимальный уровень запаса денежных средств:

$$M_{opt} = M_{min} + \frac{S}{3}. \quad (7.5)$$

7.2. Инвестиционно–финансовый анализ

Термин «инвестиция» является одним из наиболее часто используемых понятий в экономике. Это понятие подразумевает долгосрочное вложение капитала в экономику с целью извлечения в будущем дохода в течение продолжительного времени.

Различают два вида инвестиций – финансовые и реальные. Финансовые инвестиции представляют собой вложения в долгосрочные финансовые активы – акции, облигации и др., а реальные – в развитие материально-технической базы предприятий – новое строительство, реконструкцию имеющихся объектов недвижимости, приобретение основных фондов и др.

Инвестиционная деятельность является рискованной и поэтому связана с ожиданием более высокого результата по сравнению с безрисковыми вложениями средств, что является платой за риск.

Принятие решений инвестиционного характера связано с формализованной оценкой ряда параметров с помощью специальных критериев, что может быть представлено в виде инвестиционного проекта. Под инвестиционным проектом понимается формализованный документ, в котором содержится совокупность инвестиций и генерируемых ими доходов, представленных в виде денежного потока.

Инвестиционный проект можно представить в виде следующей

модели:

$$IP = \{IC_j, CF_k, n, r\}, \quad (7.6)$$

где IC_j - инвестиция в j -м году; CF_k - приток (отток) денежных средств в k -м году; n - продолжительность проекта; r - ставка дисконтирования.

Целесообразность решений инвестиционно-финансового характера обосновывается путем формализованной обработки параметров модели (7.6) с помощью модели дисконтированного денежного потока (discounted cash flow model, DCF-model), в которой реализуется идея сопоставления притоков и оттоков денежных средств, соотносимых с оцениваемой финансовой операцией.

Стоимостная характеристика денежного потока в соответствии с DCF-моделью определяется как

$$V_t = \sum_{k=1}^m \frac{CF_k}{(1+r)^k}, \quad (7.7)$$

где CF_k - элемент ожидаемого денежного потока в k -м периоде, связываемого с осуществляемой финансовой операцией (возвратный поток); r - ставка дисконтирования (доходность).

Важным элементом анализа является совокупность формализованных количественных критериев.

В качестве таких критериев понимают совокупность показателей, которые используются для отбора и ранжирования инвестиционных проектов, оптимизации эксплуатации отобранного проекта и формирования оптимальной инвестиционной программы. Все критерии можно разделить на две группы:

- основанные на дисконтированных оценках (с учетом фактора времени);

- основанные на учетных оценках (без учета фактора времени).

К показателям первой группы относятся: чистая дисконтированная стоимость, чистая терминальная стоимость, индекс рентабельности инвестиций, внутренняя норма прибыли, модифицированная внутренняя норма прибыли, дисконтированный срок окупаемости инвестиций. К показателям второй группы относятся: срок окупаемости инвестиций, учетная норма прибыли.

Рассмотрим критерии, основанные на дисконтированных оценках.

Под чистой дисконтированной стоимостью (net present value, NPV) понимается разность суммы элементов возвратного потока и исходной инвестиции, дисконтированных к началу действия оцениваемого инвестиционного проекта. Этот критерий принимает во внимание изме-

нение стоимости денег во времени. Метод основан на сопоставлении величины исходной инвестиции (IC) с общей суммой дисконтированных элементов возвратного потока $\{CF_k\}$, $k=1,2,\dots,n$, генерируемых ею в течение прогнозируемого срока действия проекта:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - IC. \quad (7.8)$$

Если при разработке и реализации проекта предполагается инвестирование финансовых ресурсов в течение m лет, то возможны два варианта расчета. По первому варианту инвестиции рассматриваются как элемент совокупного денежного потока, дисконтированного к началу реализации инвестиционного проекта. Совокупный денежный поток k -го года CF_k находится как алгебраическая сумма возвратного потока и оттока в виде инвестиции, соответствующих этому году. По второму варианту определяется дисконтированная сумма инвестиций с использованием в качестве ставки дисконтирования прогнозируемого годового темпа инфляции. Для расчетов по первому варианту используется формула (7.8), для второго варианта используется модификация этой модели:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=1}^m \frac{IC_j}{(1+i)^j}, \quad (7.9)$$

где j -прогнозируемый средний темп инфляции.

Если $NPV < 0$, то в случае принятия проекта ценность компании уменьшится и собственники компании понесут убытки. Поэтому в таком проекте принимать участие нецелесообразно. Если $NPV = 0$, то в случае принятия проекта ценность компании не изменится и поэтому решение о целесообразности реализации инвестиционного проекта должно приниматься на основе других аргументов. Если $NPV > 0$, то в случае принятия проекта ценность компании увеличится и поэтому проект следует принять.

Пример 7.1. Оценить эффективность инвестиционного проекта со следующими характеристиками (млн руб.): $\{-250, 70, 80, 90, 80\}$ при ставке дисконтирования, а) равной 10 % и б) при изменяющейся ставке дисконтирования по годам соответственно 10 %, 11 %, 12 %, 12 %.

В первом случае воспользуемся (7.8): $NPV = 2,01$ млн руб., т.е. проект выгоден.

Во втором случае:

$$NPV = -250 + \frac{70}{1,1} + \frac{80}{1,1 \times 1,11} + \frac{90}{1,1 \times 1,11 \times 1,12} + \frac{80}{1,1 \times 1,11 \times 1,12^2} = -2,802 \text{ млн руб.}$$

Так как NPV имеет отрицательное значение, то проект невыгоден.

Пример 7.2. Оценить, стоит ли инвестировать 20 млн руб. в инвестиционный проект со следующими характеристиками: чистый денежный доход в первый год эксплуатации результата инвестиций – 8 млн руб., во – второй год – 11 млн руб., в третий год – 6 млн руб. Доходность альтернативных инвестиций 12 % годовых.

Оценку проведем путем расчета чистой текущей стоимости:

$$NPV = \frac{8}{1 + 0,12} + \frac{11}{(1 + 0,12)^2} + \frac{6}{(1 + 0,12)^3} - 20 = 0,184 \text{ тыс. руб.}$$

Величина чистой текущей стоимости больше нуля, следовательно, инвестирование 20 млн руб. в инвестиционный проект выгодно.

Под чистой терминальной (наращенной) стоимостью (net terminal value, NTV) понимается разность суммы элементов возвратного потока и исходной инвестиции, наращенных к моменту окончания оцениваемого проекта.

Из этого определения следует, что чистая терминальная стоимость определяется по формуле:

$$NTV = \sum_{k=1}^n CF_k \times (1 + r)^{n-k} - IC \times (1 + r)^n. \quad (7.10)$$

Денежные средства следует вкладывать в проект в случае, если NTV больше нуля, и следует отказаться от вложения денежных средств, если наоборот NTV , меньше нуля. В первом случае инвестор получит выгоду по сравнению с альтернативным вложением средств, а во втором - выгоднее вложить средства в альтернативный проект. Если NTV равна нулю, то решение нужно принимать на основе других критериев.

Пример 7.3. Используя исходные данные примера 7.2, оценить целесообразность инвестиций на основе расчета чистой терминальной стоимости.

$$NTV = 8 \times (1 + 0,12)^2 + 11 \times (1 + 0,12) + 6 - 20 \times (1 + 0,12)^3 = 0,257 \text{ тыс. руб.}$$

Величина чистой терминальной стоимости больше нуля, следовательно, инвестирование 20 млн руб. в инвестиционный проект выгодно.

Внутренняя норма прибыли (internal rate of return, *IRR*) численно равна значению ставки дисконтирования, при которой чистая дисконтированная стоимость инвестиционного проекта (*NPV*) равна нулю.

Для конкретного проекта значение (*IRR*) равняется *r*, найденному из уравнения:

$$NPV = f(r) = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} - IC = 0. \quad (7.11)$$

Для расчетов применяется DCF-модель, когда искомой величиной является процентная ставка, а другие параметры модели считаются заданными. На рис. 7.3 приведен график функции $NPV=f(r)$ для наиболее типовой ситуации, когда единовременный отток (*IC*) сменяется серией притоков (CF_k), в сумме превосходящих *IC*.

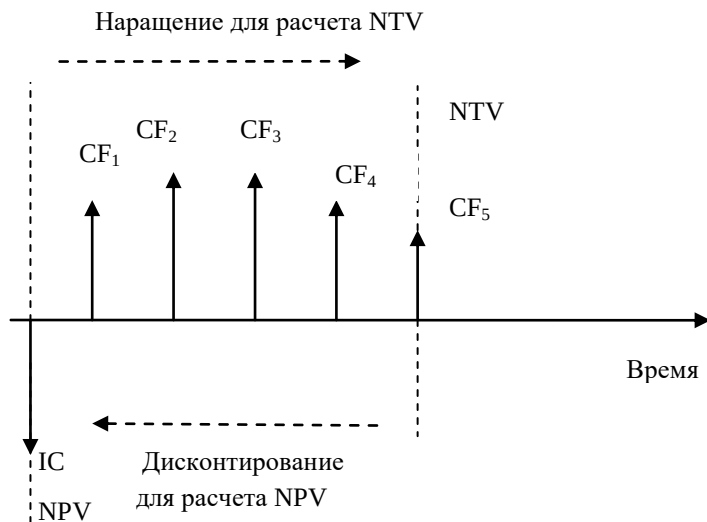


Рисунок 7.3 - Логика расчетов NPV и NTV

Приведем (7.11) к виду (7.12) и изобразим эту модель на графике (рис. 7.4):

$$NPV = \sum_{k=0}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k}, \quad (7.12)$$

где $CF_0 = -IC$.

Уравнение (7.12) является нелинейным, и поэтому значение r , соответствующее IRR, можно найти только приближенно. Наиболее простой способ приближенного решения нелинейных уравнений (метод линейной интерполяции и метод Ньютона – Рафсона) показан в главе 5.

Эта функция обладает рядом свойств. Некоторые из них не зависят от вида денежного потока, а другие проявляются лишь в определенных ситуациях, т.е. характерны только для специфических потоков.

Во-первых, график функции стремится к ∞ при приближении r к 1.

Во-вторых, при $r=0$ выражение в правой части (7.12) преобразуется в сумму элементов исходного денежного потока, т.е. график NPV пересекает ось ординат в точке, равной сумме всех элементов недисконтированного денежного потока, как положительных, так и отрицательных.

В-третьих, из (7.12) видно, что для проекта, где сумма дисконтированных элементов возвратного потока больше суммы оттока (первоначальных инвестиций) с ростом r , график функции стремится к оси абсцисс и пересекает ее в точке IRR.

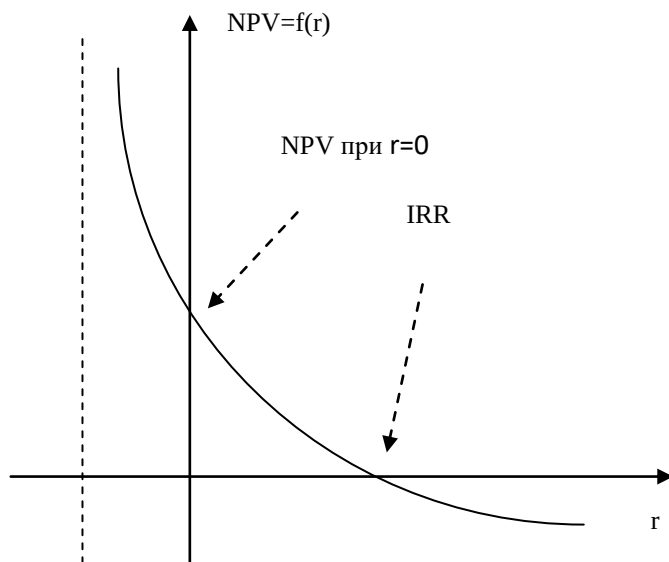


Рисунок 7.4 - График NPV типового инвестиционного проекта

Показатель IRR измеряется в процентах и означает максимально

допустимую доходность проекта, при достижении которой реализация проекта не приносит экономического эффекта, но и не дает убытка. То есть, смысл расчета внутренней нормы прибыли заключается в определении ожидаемой доходности проекта.

Например, если проект финансируется только за счет банковского кредита, то значение IRR показывает границу банковской процентной ставки, превышение которой делает проект невыгодным.

В определенном смысле показатель IRR дает характеристику резерва безопасности в отношении анализируемого инвестиционного проекта. Чем выше IRR, тем больше безопасность инвестора при реализации проекта.

Пример 7.4. Оценить, стоит ли инвестировать 20 млн руб. в инвестиционный проект со следующими характеристиками: чистый денежный доход в первый год эксплуатации результата инвестиций – 8 млн руб., во – второй год – 10 млн руб., в третий год – 6 млн руб., в четвертый год – 4 млн руб., используя критерий внутренней нормы прибыли.

Расчет будем вести начиная со значения ставки дисконтирования равного 10 %, увеличивая значение ставки дискретно на 5 %.

Чистая текущая стоимость при величине ставки дисконтирования 10 % будет равна:

$$NPV = \frac{8}{1 + 0,1} + \frac{10}{(1 + 0,1)^2} + \frac{6}{(1 + 0,1)^3} + \frac{4}{(1 + 0,1)^4} - 20 = \\ = 2,77 \text{ млн руб.}$$

Так как чистая текущая стоимость больше нуля, проведем следующий расчет при увеличенной ставке дисконтирования.

$$NPV = \frac{8}{1 + 0,15} + \frac{10}{(1 + 0,15)^2} + \frac{6}{(1 + 0,15)^3} + \frac{4}{(1 + 0,15)^4} - 20 = \\ = 0,756 \text{ млн руб.}$$

Увеличим ставку дисконтирования еще на 5 % и рассчитаем чистую текущую стоимость:

$$NPV = \frac{8}{1 + 0,2} + \frac{10}{(1 + 0,2)^2} + \frac{6}{(1 + 0,2)^3} + \frac{4}{(1 + 0,2)^4} - 20 = \\ = -994 \text{ млн руб.}$$

В связи с тем, что чистая текущая стоимость при ставке дисконтирования 20 % стала отрицательной, значение искомой ставки лежит между 15 и 20 %. Для более точного определения воспользуемся методом линейной интерполяции.

$IRR = 0,15 + \frac{756}{756+994} \times (0,2 - 0,15) = 0,1716$ или с округлением 17,2 %.

Индекс рентабельности инвестиций (profitability index, PI) – это отношение суммы дисконтированных элементов возвратного потока к исходной инвестиции:

$$PI = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} / IC. \quad (7.13)$$

Логика применения этого критерия следующая:

- если $PI > 1$, то проект следует принять;
- если $PI < 1$, то проект следует отклонить;
- если $PI = 1$, то проект не оказывает влияния на стоимость фирмы.

Дисконтированный срок окупаемости инвестиций (discounted payback period, DPP) - это число базисных периодов, за которое произойдет возмещение произведенных инвестиционных расходов с учетом фактора времени. Формула расчета этого показателя, построенная на базе DCF-модели, имеет вид:

$$DPP = \min m, \text{ при котором } \sum_{k=1}^m \frac{CF_k}{(1+r)^k} \geq IC. \quad (7.14)$$

7.3. Аренда оборудования (лизинг)

Аренда оборудования является одним из видов производственного инвестирования. Перед владельцем некоторого актива стоит задача правильного определения размера арендной платы и финансовой эффективности сдачи этого актива в аренду, а компания, которой требуется некоторый актив, должна определить, является ли финансовая аренда менее дорогостоящим мероприятием, чем его покупка (как правило, с учетом заемных средств).

Можно выделить две основные формы лизинга – финансовый и операционный (оперативный) лизинг.

Финансовый лизинг – это лизинг, при котором риски и вознаграждения от владения и пользования арендованным имуществом ложатся на арендатора (лизингополучателя). Аренда (лизинг) признается финансовой, если выполняются следующие условия:

- срок договора финансового лизинга равен или сопоставим со сроком амортизации арендуемого имущества;
- по окончании договора имущество переходит в собственность лизингополучателя или выкупается им по остаточной стоимости;

- платежи лизингополучателя превышают расходы лизингодателя по приобретению данного имущества.

Операционный (оперативный) лизинг – это лизинг, не являющийся финансовым. Риски владения и пользования арендованным имуществом не передаются арендатору (лизингополучателю), а арендодатель (лизингодатель) отражает имущество, переданное в аренду, в своем балансе. Операционный (оперативный) лизинг заключается на срок, меньший, чем амортизационный период арендуемого имущества, и предусматривает возврат объекта лизинга владельцу по окончании срока действия контракта.

Сравнение затрат на аренду и покупку необходимо делать с помощью дисконтирования. В качестве критерия, на основании которого делается оценка целесообразности того или иного варианта финансирования (инвестирования), используется либо критерий NPV (применяется в анализе лизингодателя), либо критерий чистой дисконтированной стоимости затрат NPVC, представляющий собой модификацию критерия NPV (применяется в анализе лизингополучателя).

$$NPVC = \sum_{k=1}^n \frac{NCF_k}{(1+r)^k}, \quad (7.15)$$

где NCF_k - чистый денежный поток в k -ый период, определяемый как алгебраическая сумма денежных потоков за этот период.

Пример 7.5. Оценить, какой вариант приобретения оборудования является более выгодным для предприятия. Первый вариант – финансовый лизинг сроком на 4 года с ежегодным платежом постнумерандо в размере 150 тыс. руб. Второй вариант - покупка оборудования за 480 тыс. руб. Для оплаты оборудования привлекается кредит под 12 % годовых с равномерным погашением и начислением процентов на остаток долга. Ставка налога на прибыль – 20 %. Полезный срок использования оборудования 4 года. Амортизация начисляется равномерно. Кредит выдается в начале года. Все платежи по кредиту - постнумерандо.

Для оценки будем использовать критерий чистой дисконтированной стоимости затрат.

По первому варианту лизинговые платежи представляют собой аннуитет в размере 150 тыс. руб. в год. Лизинговые платежи уменьшают налогооблагаемую базу по прибыли. Для расчетов будем использовать формулу (7.15).

$$NPVC = (150 - 150 \times 0,2) \times \frac{1-(1+0,12)^{-4}}{0,12} = 364,44 \text{ тыс. руб.}$$

По второму варианту годовой платеж состоит из двух частей. Пер-

вая часть – возврат кредита, который представляет собой аннуитет в размере 120 тыс. руб. (сумму кредита в размере 480 тыс. руб. разделим на срок кредита 4 года). Амортизационные отчисления также составят 120 тыс. руб. Амортизационные отчисления уменьшают налогооблагаемую базу по прибыли. Тогда фактические затраты предприятия будут равны разности между годовым платежом по погашению кредита и уменьшением налога на прибыль. Для расчетов будем использовать (7.15):

$$NPVC = (120 - 120 \times 0,2) \times \frac{1 - (1 + 0,12)^{-4}}{0,12} = 291,552 \text{ тыс. руб.}$$

Вторая часть платежа – выплата процентов за пользование кредитом, который представляет собой ренту с абсолютным изменением платежа. Для расчетов будем использовать (5.41). Сумма первого процентного платежа составит 57,6 тыс. руб. (сумму кредита в размере 480 тыс. руб. умножим на процентную ставку по кредиту в размере 12 %). Сумма второго процентного платежа будет меньше на 14,4 тыс. руб. (уменьшение задолженности по кредиту в размере 120 тыс. руб. умножим на процентную ставку по кредиту в размере 12 %). Так как уменьшение задолженности по кредиту величина постоянная, то уменьшение процентных платежей также величина постоянная в размере 14,4 тыс. руб. Процентные платежи уменьшают налогооблагаемую базу по прибыли. Тогда фактические затраты предприятия будут равны величине годового процентного платежа, уменьшенного на экономию на налоге на прибыль.

$$NPVC = (1 - 0,2) \left[\left(57,6 - \frac{14,4}{0,12} \right) \times \frac{1 - (1 + 0,12)^{-4}}{0,12} + \frac{4 \times 14,4 \times (1 + 0,12)^{-4}}{0,12} \right] =$$

$$= 92,456 \text{ тыс. руб.}$$

Общая сумма дисконтированных затрат по второму варианту равна:

$$NPVC = 291,552 + 92,456 = 384,008 \text{ тыс. руб.}$$

Так как дисконтированная сумма лизинговых платежей меньше, чем дисконтированная сумма платежей при покупке оборудования, то более предпочтительным является заключение договора финансового лизинга.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте характеристику основных подходов к определению оптимальной величины запаса денежных средств на предприятии.

2. Дайте характеристику модели Баумоля.
3. Покажите алгоритм опереления оптимальной величины денежных средств на предприятии в соответствии с моделью Миллера – Орра.
4. Дайте определение термину «инвестиция».
5. Покажите, как определяется стоимостная характеристика денежного потока в соответствии с моделью дисконтированных денежных потоков.
6. Перечислите основные количественные критерии оценки эффективности инвестиционно–финансовых решений.
7. Дайте определение чистой дисконтированной и чистой терминальной стоимости.
8. Как можно использовать чистую дисконтированную и чистую терминальную стоимость для оценки эффективности инвестиционно–финансовых решений?
9. Дайте определение внутренней нормы прибыли.
10. Покажите, каким образом можно использовать внутреннюю норму прибыли для оценки эффективности инвестиционно–финансовых решений.
11. Покажите, как рассчитывается индекс рентабельности инвестиций.
12. Покажите, как рассчитывается дисконтированный срок окупаемости инвестиций.
13. Дайте определение лизингу.
14. Дайте характеристику финансовому лизингу.
15. Дайте характеристику операционному лизингу.
16. На основании каких количественных критериев осуществляется оценка выгодности лизинга по сравнению с покупкой оборудования?
17. В чем отличие чистой дисконтированной стоимости затрат от чистой дисконтированной стоимости?
18. Потребность фирмы в денежных средствах составляет 600 000 у.е. в месяц. Фирма имеет портфель ликвидных ценных бумаг, ставка процента по которым 0,3 % в месяц. Расходы на конвертацию ценных бумаг составляют 400 руб. за одну сделку. Определите оптимальный объем ценных бумаг, конвертируемых в деньги, и количество конвертаций в месяц.
19. Денежные потоки предприятия изменяются в значительных пределах. За прошедший квартал среднеквадратическое отклонение сальдо дневного денежного потока составило 250 000 руб. Минимальный запас денежной наличности установлен менеджерами в размере 600 000 руб. Расходы по конвертации ценных бумаг – 5 500 руб. Годовая процентная ставка – 4 %.

Определите оптимальный и максимальный уровень запаса наличных денежных средств.

20. Оцените, стоит ли вкладывать в инвестиционный проект 10 млн руб., если элементы возвратного потока равны: в первый год – 5 млн руб., во второй год – 4 млн руб. и в третий год – 3 млн руб. Приемлемая норма прибыли для инвестора составляет 15 % в год.

21. Оцените, стоит ли вкладывать в инвестиционный проект 20 млн руб., если элементы возвратного потока равны: в первый год 4 млн руб., во второй год 6 млн руб., в третий год 8 млн руб., в четвертый год 5 млн руб. Приемлемая норма прибыли для инвестора 16 % годовых. Расчеты произвести с использованием чистой терминальной (наращенной) стоимости.

22. Вам предлагают вложить 250 тыс. руб. в проект, рассчитанный на 12 лет. Доходы по проекту: в течение первых четырех лет по 24 тыс. руб. в год, в следующие три года 28 тыс. руб. и в последующие годы по 35 тыс. руб. (постнумерандо). Стоит ли принимать это предложение, если приемлемая норма прибыли 15 %.

23. Оцените на основе критерия *IRR*, стоит ли вкладывать в инвестиционный проект 15 млн руб., если элементы возвратного потока равны: в первый год – 5 млн руб., во второй год – 8 млн руб. и в третий год 4 млн руб., приемлемая норма прибыли для инвестора составляет 12 % в год.

24. Лизинговая компания получила предложение о заключении договора финансового лизинга на следующих условиях. Стоимость объекта лизинга 10 млн руб. Срок действия договора – 5 лет. Ежегодные поступления от лизингополучателя в конце года 3 млн руб. Ежегодные текущие затраты лизингодателя – 1,5 млн руб. Ставка налога на прибыль – 20 %. Приемлемая норма прибыли 15 %. Следует ли заключать договор?

ГЛАВА 8. ДОХОДНОСТЬ И РИСК ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

8.1. Доход и доходность финансовых операций

Финансовой называется любая операция, начальное и конечное состояние которой имеет денежное выражение (оценку). Обозначив соответственно P_0 и P_1 оценки начального и конечного состояния операции, можно получить и оценку выгоды (Pr) от проведения финансовой операции как их разность. Величину Pr можно считать прибылью от проведения финансовой операции. Так как при определении Pr не учитываются затраты на проведение операции, то эта величина лишь условно может быть отнесена к прибыли. Величина P_1 является доходом, полученным в результате совершения финансовой операции.

Еще одной важнейшей характеристикой финансовой операции является ее доходность, которая может быть определена по следующей формуле:

$$d = \frac{P_1 - P_0}{P_0}. \quad (8.1)$$

Доходность может измеряться в виде десятичной дроби, простой дроби и в виде процентов.

Доходность финансового актива - это отдача на вложенный в него капитал, выраженная в виде процентной ставки. Показатель доходности используется вместе с показателем дохода, но имеет перед ним неоспоримые преимущества, так как является показателем относительным и может сопоставляться с другими показателями, а также легко оцениваться.

Важным моментом, который необходимо учитывать при проведении финансовых расчетов, является следующее. Если финансовая операция повторяется в течение нескольких периодов, то общая доходность операции за весь период не будет равна сумме доходностей отдельных периодов.

Покажем это сначала на примере двух периодов осуществления финансовой операции.

Доходность за первый период (t_1) и второй период (t_2) соответственно будет равна:

$$d_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \quad (8.2)$$

Доходность за весь рассматриваемый период $t=t_1+t_2$ будет равна:

$$d = \frac{P_2 - P_0}{P_0}. \quad (8.3)$$

Тогда $d_1 = \frac{P_1}{P_0} - 1$, $d_2 = \frac{P_2}{P_1} - 1$, $d = \frac{P_2}{P_0} - 1$. Перенесем (-1) в левую часть и получим: $d_1 + 1 = \frac{P_1}{P_0}$, $d_2 + 1 = \frac{P_2}{P_1}$, $d + 1 = \frac{P_2}{P_0}$. Перемножим первые два выражения и получим: $(d_1 + 1) \times (d_2 + 1) = \frac{P_2}{P_0}$. Учитывая, что $d + 1 = \frac{P_2}{P_0}$, получаем: $(d_1 + 1) \times (d_2 + 1) = d + 1$. Тогда $d = (d_1 + 1) \times (d_2 + 1) - 1$.

В случае n периодов $d = (d_1 + 1) \times (d_2 + 1) \times \dots \times (d_n + 1) - 1$.

Для равных доходностей за отдельные периоды времени общая доходность будет равна:

$$d = (1 + d_1)^n - 1. \quad (8.4)$$

Здесь мы имеем эффект синергии, когда общий результат нескольких частей больше аддитивного эффекта при простом суммировании. Например, для двух периодов общая доходность составит:

$$d = (d_1 + 1) \times (d_2 + 1) - 1 = d_1 + d_2 + d_1 \times d_2. \quad (8.5)$$

Пример 8.1. Финансовый актив был куплен в момент времени t_0 за 50 тыс. руб. В конце календарного года по нему был получен доход в размере 3 тыс. руб., рыночная цена актива в конце года оценивается в размере 51 тыс. руб. В следующем году актив принес владельцу доход в размере 4 тыс. руб. и был продан за 52 тыс. руб. Определить доходность актива за каждый период владения и общую величину доходности.

Общая величина дохода в первый период владения активом будет равна сумме полученного дохода и оценке рыночной цены актива $P_1 = 3 + 51 = 54$ тыс. руб. Во второй год владения общая величина дохода складывается из суммы полученного дохода и цены продажи актива $P_2 = 4 + 52 = 56$ тыс. руб.

Доходность за первый период $d_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{54 - 50}{50} = 0,08$ или 8 %.

Доходность за второй период $d_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{56 - 54}{54} = 0,037037$ или 3,7037 %.

Общая доходность $d = \frac{P_2 - P_0}{P_0} = \frac{56 - 50}{50} = 0,12$ или 12 %.

Определим общую доходность используя (8.5)

$d = d_1 + d_2 + d_1 \times d_2 = 0,08 + 0,037037 + 0,08 \times 0,037037 = 0,12$ или 12 %.

Здесь эффект синергии привел к уменьшению общей доходности, так как общая доходность меньше, чем сумма доходностей по отдельным периодам.

8.2. Риск финансовой операции

Большая часть финансовых операций осуществляется в условиях неопределенности, когда большинство факторов, оказывающих влияние на условия и эффективность операции, являются случайными величинами. Это приводит к неопределенности в доходности финансовой операции.

В этой ситуации финансовая операция характеризуется еще одной величиной, которая тесно связана с ее доходностью, и определяет степень неопределенности в извлечении дохода и называется риском финансовой операции.

Под риском финансовой операции в условиях неопределенности понимается отклонение доходности операции от среднего значения [3].

Для количественной оценки риска необходимо знать вероятности различных исходов финансовой операции, а значит, и вероятности p_i ее различных доходностей d_i . Следовательно, мы имеем доходность d как случайную величину с законом распределения $p_i = p(d_i)$.

Средней ожидаемой доходностью финансовой операции является математическое ожидание случайной величины d - $M^*(d) = \sum_i d_i \times p_i$.

Дисперсией доходности финансовой операции называется математическое ожидание квадрата отклонения доходности от своего среднего значения $D^*(d) = M^*[(d - M^*(d))^2]$.

Риском финансовой операции называется среднее квадратичное отклонение доходности $r(d) = \sigma(d) = \sqrt{D^*(d)}$.

В некоторых случаях в качестве меры риска финансовой операции используют среднее квадратичное отклонение дохода D , т.е.

$r(D) = \sigma(D) = \sqrt{D^*(D)}$. Однако такое определение риска обладает существенным недостатком, так как может характеризовать риск операций только с примерно равным доходом. Например, отклонение дохода на 10 д.е. будет иметь совершенно разный риск для операций с доходом, скажем, в 100 д.е. и доходом 1 000 000 д.е., хотя формально риск, определенный таким образом, будет одинаков.

Отметим два важных обстоятельства, которые должны учитываться при измерении риска:

1. При увеличении масштаба операции в C раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в C раз, эффективность операции возрастает в C раз, риск – в $|C|$ раз, а средняя доходность не изменяется.

Покажем это:

$$D^*(cX) = M^*[(cX - M^*(cX))^2] = M^*[c^2(X - M^*(X))^2] = c^2 M^*[(X - M^*(X))^2] = c^2 D^*(X).$$

Отсюда

$$r(cX) = \sigma(cX) = \sqrt{D^*(cX)} = \sqrt{c^2 D^*(X)} = c \sqrt{D^*(X)} = c \times r(X).$$

2. При изменении всех доходов на одно и то же постоянное число эффективность операции также изменяется на это число, а риск операции не изменяется.

Средняя ожидаемая доходность финансовой операции $M^*(d)$ и ее риск $r(d)$ связаны неравенством Чебышева:

$$p(d - M^*(d) > \delta) \leq \frac{r_d^2}{\delta^2} \text{ или } p(d - M^*(d) < \delta) > 1 - \frac{r_d^2}{\delta^2}. \quad (8,6)$$

Смысл этих соотношений заключается в следующем.

Вероятность того, что отклонение доходности финансовой операции от среднего значения превысит заданное число δ , ограничена сверху числом $\frac{r_d^2}{\delta^2} = \frac{D^*(d)}{\delta^2}$, а снизу числом $1 - \frac{r_d^2}{\delta^2} = 1 - \frac{D^*(d)}{\delta^2}$.

Из неравенства Чебышева следует правило «3 σ »: для любой случайной величины X выполняется неравенство:

$$p(|X - m| < 3\sigma) > 1 - \frac{D^*(X)}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}. \quad (8.7)$$

Это означает, что если известны среднее значение случайной величины и ее стандартное отклонение, то с вероятностью большей $8/9$ (89 %) можно утверждать, что значение случайной величины будет находиться в интервале $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Т.е. значения случайной величины вне этого интервала можно на практике не учитывать.

На практике для большинства случайных величин такая вероятность значительно ближе к 1, чем к $8/9$. Например, при распределении случайной величины близком к нормальному, с вероятностью 68 % можно утверждать, что значение случайной величины X находится в границах $M^*(X) \pm \sigma$, с вероятностью 95 % - в пределах $M^*(X) \pm 2\sigma$, а с вероятностью 99,7 % - в пределах $M^*(X) \pm 3\sigma$.

В экономике и финансах особую роль в распределении случайных величин играют равномерное и нормальное распределения.

Равномерное распределение является наиболее простым и, когда истинное распределение вероятностей неизвестно, может использоваться для примерной оценки числовых характеристик случайных величин. Кроме того, целый ряд ситуаций обладает симметрией, что делает равномерное распределение хорошим приближением реального распределения.

Известно, что закон распределения среднеарифметического значения большого числа случайных величин при достаточно общих условиях близок к нормальному. Так как в финансовых и коммерческих вычислениях очень часто используют среднеарифметические величины и суммы большого числа случайных величин, то использование для вычисления оценок случайных величин нормального распределения вероятностей является не только обоснованным, но часто единственно возможным. По этому закону распределены величины финансовых и денежных потоков, доходы и расходы компаний, зависящие от большого количества факторов и др.

В производственно-хозяйственной деятельности любые организации осуществляют множество финансовых операций. Большая часть из них является статистически связанными, а меньшая часть является независимыми. В связи с этим возникает необходимость при проведении финансового анализа использовать такое понятие, как коррелированность (взаимосвязь, взаимозависимость) финансовых операций.

Важной статистической характеристикой является теснота связи между переменными. Если две случайные величины X и Y являются взаимосвязанными, то связь между ними характеризуется корреляционным моментом.

$$K^*[X, Y] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})}{n}. \quad (8.8)$$

Если корреляционный момент отличен от нуля, то случайные величины X и Y называются коррелированными и некоррелированными, если корреляционный момент равен нулю.

Мерой тесноты связи между двумя случайными величинами является коэффициент парной корреляции r_{xy} .

Коэффициент парной корреляции – это отношение корреляционного момента к корню квадратному из произведения дисперсий случайных величин.

$$r_{xy} = \frac{K^*[X, Y]}{\sqrt{D^*[X] \times D^*[Y]}}. \quad (8.9)$$

Предположим, что две финансовые операции некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий и риск суммарной операции будет равен:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}. \quad (8.10)$$

Для двух произвольных финансовых операций риск суммарной операции равен:

$$r = \sqrt{r_1^2 + 2 \times r_1 \times r_2 \times r_{xy} + r_2^2}. \quad (8.11)$$

Коэффициент парной корреляции $|r_{xy}| \leq 1$, т.е. связь между случайными переменными может быть как положительной, так и отрицательной. Из этого следует, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ (при $r_{xy} > 0$, когда совершение одной операции положительно влияет на результат второй операции), так и меньше этой величины (при $r_{xy} < 0$, когда совершение одной операции отрицательно влияет на результат второй операции). Риск суммарной операции находится в пределах:

$$|r_1 - r_2| \leq r \leq r_1 + r_2. \quad (8.12)$$

При $r_{xy} = 1$ и $r_{xy} = -1$ между случайными переменными наблюдается самая сильная корреляционная связь и имеет место функциональ-

ная зависимость между ними.

Одним из наиболее распространенных методов измерения и контроля рыночных и кредитных рисков в нормальных бизнес-условиях является стоимость под риском (VaR), рекомендованная для использования Базельским комитетом по банковскому надзору [3].

Стоимость под риском – это абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом в течение некоторого фиксированного периода времени в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности [3].

Отсюда следует, что VaR это:

1) наибольший ожидаемый убыток от колебания стоимости портфеля активов заданной структуры, который может быть получен за данный период времени с заданной вероятностью возникновения $P(X \leq VaR) = 1 - \alpha$, где α – заданный уровень доверительной вероятности;

2) величина убытка, который может быть превышен с вероятностью не более $1 - \alpha$ в течение последующих t дней.

VaR не может использоваться для рынков, находящихся в состоянии шока. На базе VaR рассчитываются необходимые резервы капитала.

8.3. Методы уменьшения риска финансовых операций

При проведении финансовых операций для повышения их эффективности необходимо учитывать различные виды финансовых рисков. Перечислим основные виды финансовых рисков.

Финансовые риски обычно подразделяют на три вида:

1. Риски, связанные с изменением покупательной способности денег.

2. Инвестиционные риски.

3. Риски, связанные с организацией хозяйственной деятельности организации.

К первой группе финансовых рисков относят инфляционные и дефляционные риски, валютные риски и риски ликвидности.

Инфляционный риск связан с возможным уменьшением реальной стоимости финансовых активов, а также ожидаемых доходов и прибыли организации в связи с инфляционным ростом цен. Инфляционные риски оказывают отрицательное воздействие на финансовое состояние предприятия в двух направлениях, во-первых, когда цены на сырье и материалы растут быстрее, чем на готовую продукцию, и во-вторых, когда

цены на продукцию предприятия растут быстрее, чем цены на продукцию конкурентов.

Дефляционный риск – это возможное ухудшение условий хозяйствования из-за снижения уровня цен.

Валютные риски – это опасность потерь в результате неблагоприятного изменения валютного курса при проведении внешнеторговых операций.

Риск ликвидности – это риски, связанные с возможностью потерь при реализации финансовых активов из-за снижения оценки их потребительной ценности.

Вторая группа финансовых рисков связана с возможными финансовыми потерями при осуществлении предприятием инвестиционной деятельности. Эта группа финансовых рисков включает в себя риск снижения финансовой устойчивости, риск упущенной выгоды, риск снижения доходности и риск прямых финансовых потерь.

Риск снижения финансовой устойчивости связан с ухудшением структуры капитала при росте доли заемных средств. При чрезмерном увеличении доли заемных средств в капитале предприятия увеличивается возможность финансовых потерь, в результате которых может наступить банкротство предприятия.

Риск упущенной выгоды отражает возможность появления косвенного финансового ущерба в результате отказа от какого-либо действия, например страхования, инвестирования и др.

Риск снижения доходности возникает в результате изменения размера процентов по вкладам и кредитам, и дивидендов по вкладам в уставные капиталы других организаций.

Третья группа финансовых рисков, связанных с организацией хозяйственной деятельности организации включает в себя авансовые и оборотные риски.

Авансовые риски возникают в любой области производственной деятельности, если не осуществляется предоплата за поставляемые в будущем товары, услуги и работы. Авансовые риски связаны с финансированием производственной деятельности при производстве товаров, услуг и работ, которые могут быть компенсированы при отказе покупателя от приобретения готового продукта только за счет прибыли продавца. Если компания не имеет эффективно налаженного сбыта продукции, то она несет авансовые риски, которые выражаются в формировании складских запасов нереализованных товаров.

Оборотный риск связан с возможным наступлением дефицита финансовых ресурсов, даже при постоянной скорости реализации готовой продукции, при разных скоростях оборота финансовых ресурсов,

например при разной скорости оборота дебиторской и кредиторской задолженности.

Для снижения степени риска и его влияния на результаты финансово-хозяйственных операций применяются различные приемы. Их достаточно много, перечислим некоторые из них:

- диверсификация;
- лимитирование;
- страхование;
- хеджирование;
- установление контроля над деятельностью в связанных областях и др.

Основными методами уменьшения риска финансовых операций являются диверсификация и хеджирование.

Метод диверсификации применяется для некоррелированных операций. В его основе лежит утверждение, что отношение риска композитной финансовой операции, состоящей из n некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной операции уменьшается.

Этот эффект называется эффектом диверсификации. Он означает, что для снижения риска финансовых операций нужно проводить разнообразные не связанные друг с другом операции. При такой стратегии доход композитной операции усредняется, а риск уменьшается.

С увеличением количества финансовых операций, составляющих композитную операцию и проводимых одновременно, риск композитной операции уменьшается даже при одинаковых рисках отдельных операций.

При диверсификации требование некоррелированности операций, составляющих композитную операцию, является существенным и необходимым для снижения ее риска. Если между операциями существует положительная статистическая связь, то риск композитной операции уменьшаться не будет.

Диверсификация – это рассеивание финансового риска. Однако она не может свести финансовый риск до нуля. Это связано с тем, что на финансово-хозяйственную деятельность экономических субъектов оказывают влияние внешние факторы, которые не связаны с выбором конкретной области деятельности и поэтому на них диверсификация влияния не оказывает. К внешним факторам относятся процессы, происходящие в целом в национальной экономике, инфляция, финансовые действия, происходящие на международном рынке, изменение учетной ставки Центрального банка и др. Таким образом, риск состоит из двух

составляющих: диверсифицируемого (несистематического) и недиверсифицируемого (систематического) риска.

Диверсифицируемый риск может быть устранен при помощи его рассеивания, то есть при помощи диверсификации.

Недиверсифицируемый риск при помощи диверсификации устранить невозможно.

Однако, расширение количества несвязанных или мало связанных операций позволяет существенно сократить влияние недиверсифицируемого риска. Теоретическую основу этому дает «портфельная теория», которая успешно применяется при осуществлении финансовых инвестиций.

В качестве основных форм диверсификации финансовых рисков могут использоваться следующие направления:

- диверсификация видов финансовой деятельности;
- диверсификация валютного портфеля;
- диверсификация депозитного портфеля;
- диверсификация кредитного портфеля;
- диверсификация портфеля ценных бумаг;
- диверсификация программ реального инвестирования.

Диверсификация видов финансовой деятельности означает использование альтернативных направлений получения дохода от финансовых операций, например одновременное использование краткосрочных финансовых вложений, формирование портфеля долгосрочных финансовых вложений, формирование кредитного портфеля и др.

Диверсификация валютного портфеля предполагает использование различных иностранных валют во внешнеэкономической деятельности и уменьшение, таким образом, валютных рисков.

Диверсификация депозитного портфеля означает размещение крупных временно свободных денежных средств в различных банках. В результате уменьшается депозитный риск без существенного изменения доходности всего депозитного портфеля.

Диверсификация кредитного портфеля предусматривает большое разнообразие покупателей продукции, а следовательно, и снижение кредитного риска.

При диверсификации портфеля ценных бумаг он составляется за счет разнообразия видов ценных бумаг, включаемых в портфель. При этом несколько снижается доходность портфеля, но существенно снижаются несистематические финансовые риски.

Диверсификация программ реального инвестирования предусматривает включение в программу инвестирования разнообразных инвестиционных проектов различной региональной и отраслевой направ-

ленности, что позволяет снизить общий инвестиционный риск по программе.

Если для получения эффекта диверсификации композитную операцию составляют из нескольких независимых операций, то суть хеджирования заключается в подборе таких операций, при осуществлении которых вместе с основной риск последней уменьшается. При хеджировании должны осуществляться только операции, которые имеют сильную, но отрицательную корреляцию.

Предположим, что осуществляются две операции: основная X_1 и вспомогательная X_2 . Тогда дисперсия композитной операции будет равна: $D(X_1 + X_2) = r_1^2 + r_2^2 + 2r_{xy} \times r_1 \times r_2$.

Отсюда следует, что дисперсия композитной операции может быть меньше дисперсии основной только в случае, если выполняется условие:

$$r_2^2 + 2r_{xy} \times r_1 \times r_2 < 0, \text{ а так как } r_2^2 - \text{ величина положительная, то}$$

строго должно выполняться неравенство $r_{xy} < -\frac{r_2}{2r_1}$.

Хеджирование используется в широком и узком смысле. В широком толковании хеджирование характеризует использование любых операций уменьшения рисков финансовых потерь, попадающих под характеристику операций, показанную выше.

В узком прикладном смысле под хеджированием обычно понимают использование соответствующих финансовых инструментов, как правило, производных ценных бумаг.

Обычно хеджирование в прикладном смысле рассматривают с применением фьючерсных контрактов, опционов и операций «своп».

Фьючерсный контракт – это стандартный контракт на биржевой актив. Он может продаваться и покупаться, так как содержит стандартную информацию на биржевой актив. В частности, в нем фиксируются цена биржевого актива, его количество и характеристика актива. Сам процесс хеджирования состоит из трех операций.

Первая операция - покупка (продажа) реального биржевого актива (например, партии зерна) с поставкой в будущем по фиксированной цене. Вторая операция - обратная первой, т.е. продажа (покупка) фьючерсного контракта на аналогичную партию товара (открытие позиции по фьючерсному контракту). Третья операция - ликвидация позиции по фьючерсному контракту в момент поставки реального актива, т.е. обратная операция в виде покупки (продажи) фьючерсного контракта. Изменения цены биржевого актива и фьючерсного контракта имеют оди-

наковую тенденцию, но так как с ними совершаются противоположные операции, то риск потерь от изменения цены на биржевой актив уменьшается. Правда, уменьшается и возможность получения дополнительного дохода.

Механизм использования опционов «свопов» в целом аналогичен действию хеджирования с использованием фьючерсных контрактов.

Опцион – это ценная бумага, дающая право продать или купить в течение предусмотренного опционом времени ценную бумагу, валюту, реальный актив, производную ценную бумагу в обусловленном количестве и по заранее определенной цене.

В механизме уменьшения финансовых рисков используют хеджирование на основе опциона на покупку, опциона на продажу и двойного опциона (дающего одновременно право на покупку и продажу финансового или реального актива по оговоренной цене). Цена, которая выплачивается за покупку опциона, по существу является страховой премией.

Операция «своп» - это обмен (покупка – продажа) соответствующими финансовыми активами или финансовыми обязательствами для улучшения их структуры и уменьшения потерь. Эта операция используется для снижения рисков при совершении сделок с валютой, ценными бумагами и долговыми финансовыми обязательствами.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение дохода, доходности и риска.
2. Выразите доходность за два периода в целом через доходности каждого из периодов.
3. Выразите доходность за четыре периода в целом через доходности каждого из периодов, если доходности за каждый период одинаковы.
4. Объясните суть синергетического эффекта при рассмотрении доходности актива за несколько периодов.
5. Поясните, что является мерой риска финансовой операции.
6. Сформулируйте правило «3 σ».
7. Поясните, какая статистическая характеристика позволяет оценить тесноту связи между переменными.
8. Может ли быть коэффициент корреляции отрицательным?
9. Перечислите виды финансовых рисков и дайте их характеристику.
10. Дайте характеристику понятия – стоимость под риском.
11. Для каких целей может использоваться стоимость под риском?
12. На какие виды делятся обычно финансовые риски?
13. Дайте характеристику известных вам методов уменьшения

риска финансовых операций.

14. Дайте определение диверсификации и охарактеризуйте этот метод уменьшения риска.

15. В каких случаях применение диверсификации обоснованно?

16. Может ли использоваться диверсификация для финансовых операций, связанных между собой?

17. Дайте определение хеджированию и охарактеризуйте этот метод уменьшения риска.

18. В каких случаях применение хеджирования положительно влияет на уменьшение финансового риска?

19. Рассчитайте величину доходности за три периода времени, если в первый период доходность равна 8 %, во второй период – 7 % и в третий период – 6 %.

20. Определите величину доходности актива за год, если доходность за месяц равна 3 % и в течение года она не изменяется.

21. Определите величину синергетического эффекта, если финансовый актив за четыре равных периода времени имел доходность за первый период – 5 %, за второй период – 6 %, за третий период – 4 % и за четвертый период – 5 %.

ГЛАВА 9. КАПИТАЛЬНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ

9.1. Понятие капитальных финансовых активов

Важнейшими объектами финансового управления являются финансовые активы. Среди финансовых активов особая роль принадлежит капитальным финансовым активам - долевым ценным бумагам (акции) и долговым ценным бумагам (облигации).

Капитальные финансовые активы подразделяют на две группы: безрисковые и рисковые. Под безрисковым финансовым активом понимается актив, доход по которому не зависит от воздействия каких - либо факторов, а следовательно, будет получен. Рисковым финансовым активом называется актив, размер дохода по которому и сам факт получения дохода зависят от воздействия различных факторов и поэтому не могут быть спрогнозированы точно. К безрисковым финансовым активам относят государственные ценные бумаги, а к рисковым - корпоративные ценные бумаги.

В основе рационального управления финансовыми активами лежит ряд их базовых характеристик, таких как стоимость, цена, доходность, риск. Используя именно эти характеристики, любой инвестор принимает решения о приобретении или продаже финансового актива, о сроке владения им, о характере использования при ведении бизнеса.

При принятии решения в отношении какого-либо финансового актива всегда присутствуют два начала: объективное и субъективное. Любой финансовый актив имеет две абсолютные характеристики: рыночную цену и теоретическую стоимость. Рыночная цена является величиной объективной и характеризует реальную стоимость актива, по которой он продается и покупается. Она формируется под воздействием многих факторов, мало зависящих от воли конкретных субъектов рыночных отношений. Теоретическая или внутренняя стоимость финансового актива является величиной, которую можно охарактеризовать как субъективную. Дело в том, что у разных субъектов рыночных отношений существуют свои собственные предпочтения и оценки по поводу использования какого-либо актива и именно это позволяет им судить о внутренней стоимости актива.

Обозначим P_m рыночную цену актива, а V_t теоретическую (внутреннюю) стоимость актива. В случае если $P_m > V_t$, то инвестор оценивает актив ниже его рыночной стоимости и поэтому откажется от его

приобретения. Если, наоборот $P_m < V_t$, то, по мнению инвестора, цена актива занижена по сравнению с его действительной стоимостью и, следовательно, актив можно покупать. Ну и в случае когда $P_m = V_t$ рыночная цена соответствует внутренней стоимости актива и его можно купить, но спекулятивные сделки с целью извлечения дополнительной прибыли вряд ли возможны.

В каждый момент времени на рынке присутствует большое количество потенциальных покупателей со своими оценками внутренней стоимости актива. Поэтому рыночная цена в конкретный момент времени определяется однозначно, а оценки внутренней стоимости множественны, и однозначно определить внутреннюю стоимость актива сложно.

Ведущим способом оценки внутренней стоимости капитальных финансовых активов является модель дисконтированных денежных потоков (DCF-модель). Этот способ основан на том, что стоимость актива оценивается не по данным статистики, а с учетом ожидаемых в будущем поступлений, генерируемых активом. Тогда путем дисконтирования будущих поступлений можно рассчитать внутреннюю стоимость актива.

В соответствии с моделью дисконтированных денежных потоков оценка теоретической стоимости финансового актива зависит от трех параметров:

- элементов возвратного потока, которые представляют собой прогнозируемые доходы, получаемые в результате использования оцениваемого актива;
- горизонта прогнозирования. Самая крайняя точка в ретроспективе называется горизонтом ретроспекции, а в перспективе – горизонтом планирования (прогнозирования);
- ставки дисконтирования.

В приложении к финансовым активам DCF-модель используется для оценки текущей теоретической стоимости и ожидаемой нормы прибыли, которая может генерироваться соответствующим активом.

При оценке текущей теоретической стоимости исходят из того, что инвестору фактически предлагается купить будущий денежный поток. В случае покупки инвестор отказывается от текущего потребления денежных средств, равных теоретической стоимости актива. Так как стоимость денежных средств меняется во времени, то рациональный инвестор согласится на такую операцию лишь в том случае, если он получит приемлемый для него дополнительный доход. Это целесообразно в том случае, если дисконтированная стоимость элементов возвратного потока по приемлемой для него ставке дисконтирования будет превышать величину исходной инвестиции. Приведенная стоимость

возвратного потока и является внутренней (теоретической) стоимостью финансового актива.

При оценке ожидаемой доходности ее величина определяется из условия, что при равновесном рынке рыночная цена финансового актива стремится к его внутренней стоимости. В случае различия этих величин начинаются операции по купле - продаже этого актива, что приведет к изменению его рыночной цены и она начнет приближаться к его внутренней стоимости. Тогда при использовании DCF-модели в качестве стоимостной оценки финансового актива используется его текущая цена, и разрешая уравнение относительно r , определяют величину доходности финансового актива.

9.2. Оценка долговых ценных бумаг

Оценка дисконтной облигации. По таким облигациям купонные выплаты не осуществляются, а в момент погашения облигации ее владельцу выплачивается денежная сумма, равная номиналу (M). Для стимулирования покупок облигаций эмитент предлагает такие облигации с дисконтом, т.е. они размещаются по цене ниже номинала. Тогда доход инвестора - это разность между номиналом и ценой размещения.

Покупка такой облигации имеет для инвестора смысл только в том случае, если внутренняя стоимость актива, с его точки зрения, будет превышать рыночную стоимость, рассчитанную исходя из устраивающей инвестора нормы прибыли, т.е. если $V_t > P_m$.

Тогда:

$$V_t = \frac{M}{(1+r)^n}, \quad (9.1)$$

где V_t - теоретическая стоимость облигации; M - сумма, выплачиваемая при погашении облигации, равная ее номинальной стоимости; n - число периодов владения облигацией; r - ставка дисконтирования (величина доходности, соответствующая величине стандартного периода). На рис 9.1 схематично показана операция покупки дисконтной облигации.

Пример 9.1. Облигация с нулевым купоном номинальной стоимостью 1000 руб. размещается на рынке с дисконтом 15 % к номиналу. Срок обращения облигации 3 года. Норма доходности, устраивающая инвестора, 8 %. Будет ли совершена операция купли-продажи облигации?

$$V_t = \frac{1000}{(1+0,08)^3} = 793,83 \text{ руб.}$$

Цена продажи облигации $P = 1000 \times (1 - 0,15) = 850$ руб.

Так как теоретическая цена меньше цены продажи, то покупка облигации инвестору не выгодна.

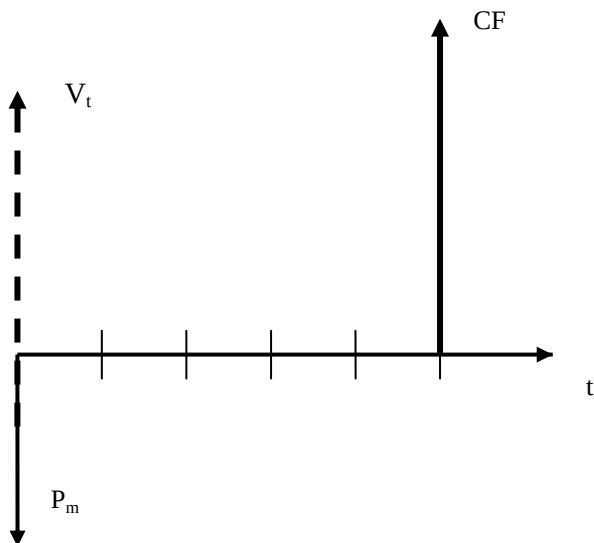


Рисунок 9.1 - Схема операции покупки дисконтной облигации

Оценка бессрочной облигации. Бессрочные облигации предусматривают выплату дохода в установленном размере или по плавающей процентной ставке в неограниченном горизонте прогнозирования. Такая облигация не может быть погашена, и поэтому доход держателя облигации складывается только из купонного дохода.

При неизменном купонном доходе ($CF_k = CF = const$) денежный поток представляет собой бессрочный аннуитет (рис. 9.2).

Оценка денежного потока, приведенного к текущему моменту времени, может быть произведена как дисконтированная величина бессрочного (вечного) аннуитета постнумерандо:

$$V_t = \frac{CF}{r}. \quad (9.2)$$

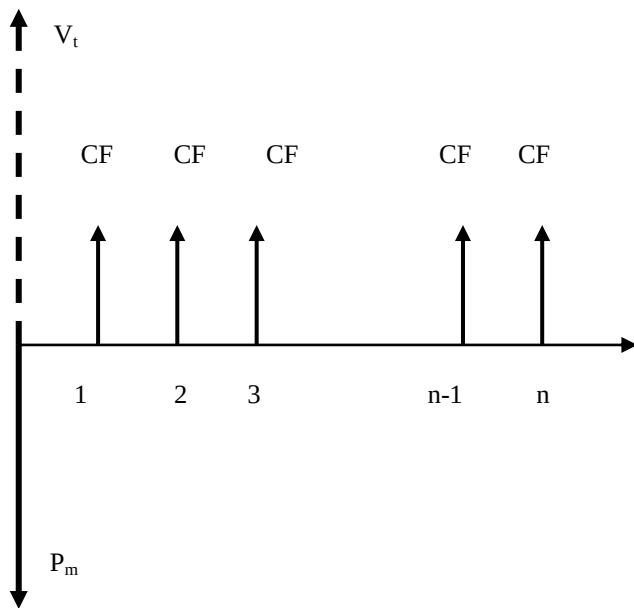


Рисунок 9.2 - Денежные потоки при оценке бессрочной облигации

Пример 9.2. Оценить теоретическую стоимость консоли (бессрочной облигации) номиналом 10 000 руб., по которой начисляются проценты по купонной ставке 3 % годовых. Проценты начисляются и выплачиваются в конце каждого года. Приемлемая ставка доходности равна 5 %.

Величина годового купона $CF = 10000 \times 0,03 = 300$ руб.

Теоретическая стоимость облигации $V_t = \frac{300}{0,05} = 6000$ руб.

Оценка срочной купонной облигации с постоянным доходом.

Эмиссия срочных купонных облигаций с постоянным доходом является наиболее распространенным видом заимствования на финансовом рынке. Владелец такой облигации извлекает два вида доходов:

- регулярный в виде выплачиваемого процента по оговоренной в момент эмиссии купонной ставке;
- единовременный при погашении облигации в сумме, равной номинальной стоимости облигации в случае безотзывной облигации, и в сумме, равной выкупной цене в случае отзывной облигации.

Денежный поток будет складываться из двух составляющих аннуитета в виде дохода по купонной ставке ($CF_k = CF = const$) и единовременной, равной номинальной стоимости облигации (M) или равной выкупной цене (P_c) (рис. 9.3).

Безотзывная облигация не предполагает ее досрочного погашения до даты, указанной при эмиссии.

Оценка теоретической стоимости безотзывной срочной купонной облигации с постоянным доходом может быть произведена по следующим формулам:

$$V_t = \sum_{k=1}^n \frac{CF}{(1+r)^k} + \frac{M}{(1+r)^n}, \quad (9.3)$$

$$V_t = CF \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{M}{(1+r)^n}. \quad (9.4)$$

В случае отзывной облигации вместо номинальной стоимости в формулах (9.3) и (9.4) используется выкупная цена, а период обращения принимается равным периоду от даты эмиссии до даты выкупа.

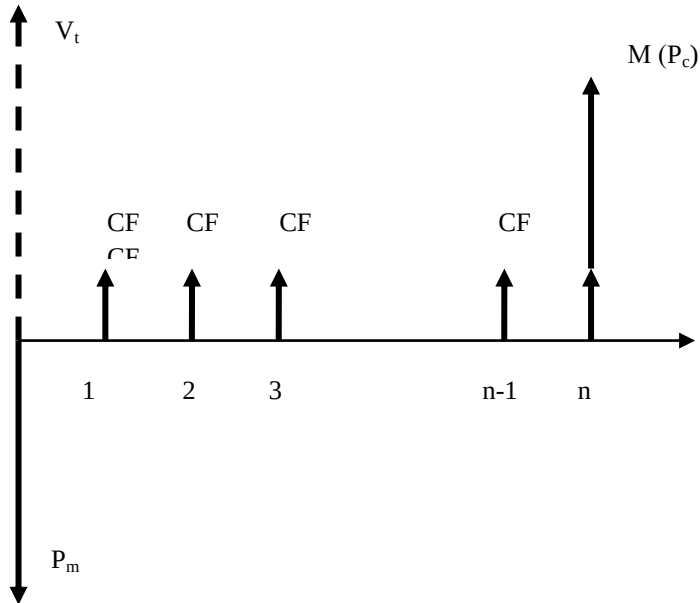


Рисунок 9.3 - Денежные потоки при оценке срочной купонной облигации

Пример 9.3. Определить теоретическую стоимость облигации со следующими параметрами: номинал – 1000 руб., купонная ставка – 7 %, срок обращения 10 лет. Период защиты от выкупа 5 лет. Выкупная цена равна номиналу плюс величина купона за один год. Расчеты произвести для полного срока обращения и для срока, равного периоду защиты. Приемлемая ставка доходности равна 5 %.

Величина годового купона $CF = 1000 \times 0,07 = 70$ руб.

Теоретическая стоимость за полный период обращения

$$V_t = 70 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-10}}{0,05} + \frac{1000}{(1 + 0,05)^{10}} = 1154,43 \text{ руб.}$$

Теоретическая стоимость за период защиты от выкупа

$$V_t = 70 \times \frac{1 - (1 + 0,05)^{-5}}{0,05} + \frac{1000 + 70}{(1 + 0,05)^5} = 1141,43 \text{ руб.}$$

9.3. Оценка долевых ценных бумаг

Основным видом долевых ценных бумаг являются привилегированные и обыкновенные акции. В оценке акций преимущественно используется подход с использованием модели дисконтированных денежных потоков (DCF-модель).

Основной целью инвестора, вкладывающего денежные средства в приобретение акций, является извлечение дохода в длительном периоде времени. Акция, как и любой финансовый актив имеет два вида дохода: регулярный в виде дивиденда и капитализированный. Капитализированный доход связан с изменением рыночной цены акции, но может быть реально получен только в случае продажи акции.

Если предположить, что инвестор владеет акцией неопределенно долго, то возвратный поток можно представить как поток дивидендов. Тогда модель оценки теоретической стоимости акции может быть представлена в следующем виде (модель Дж. Уильямса):

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}, \quad (9.5)$$

где D_k - ожидаемый дивиденд в k-м периоде.

Оценка теоретической стоимости акций и особенно обыкновенных акций является процедурой сложной и неоднозначной. Это связано с тем, что невозможно заранее точно определить важнейший параметр модели - поток дивидендов в будущем. Для проведения оценки вводят определенные ограничения и допустимые условия, что позволяет про-

изводить оценку элементов возвратного потока, представленных в виде дивидендов (D_k). Поэтому с помощью модели (9.5) можно оценивать лишь привилегированные акции. Оценка обыкновенных акций можно производить только в случае, если на динамику дивидендов наложены определенные ограничения.

Привилегированная акция приносит своему владельцу регулярный постоянный доход в неограниченном временном горизонте, и поэтому возвратный поток может быть представлен как бессрочный аннуитет постнумерандо, а, следовательно, текущая теоретическая стоимость может быть определена по формуле (9.2).

Для оценки теоретической стоимости обыкновенных акций используются разные методы, но наиболее доступным и наиболее простым является метод, основанный на прогнозировании будущих поступлений с использованием DCF-модели. Расчетные формулы будут изменяться в зависимости от предполагаемой динамики дивидендов. В основном используются три варианта динамики прогнозных значений дивидендов:

- дивиденды являются величиной постоянной;
- дивиденды возрастают с постоянным темпом прироста;
- величина дивидендов изменяется с разным темпом прироста.

Случай с постоянной величиной дивидендов является аналогичным оценке теоретической стоимости привилегированной акции и осуществляется по формуле (9.2).

Оценка теоретической стоимости акции с равномерно возрастающим дивидендом. Предполагается, что дивиденд по такой акции возрастает с постоянным темпом g . Тогда если последний выплаченный дивиденд равен D_0 , то по окончании первого года прогнозного периода выплаченный дивиденд будет равен $D_0 \times (1+g)$, по окончании второго года - $D_0 \times (1+g)^2$ и т.д.

Денежные потоки при оценке акции с постоянно возрастающим дивидендом показаны на рис. 9.4.

В соответствии с моделью Уильямса теоретическая стоимость акции будет равна:

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_0 \times (1+g)^k}{(1+r)^k} = D_0 \times \sum_{k=1}^{\infty} q^k, \quad (9.6)$$

где $q = \frac{1+g}{1+r}$.

Умножив обе части уравнения (9.6) на q и вычитая новое уравне-

ние из (9.6), получаем:

$$V_t \times (1 - q) = D_0 \times q.$$

Тогда:

$$V_t = \frac{D_0 \times (1 + g)}{r - g} = \frac{D_1}{r - g}. \quad (9.7)$$

Формула (9.7) имеет смысл при $r > g$ и называется моделью Гордона.

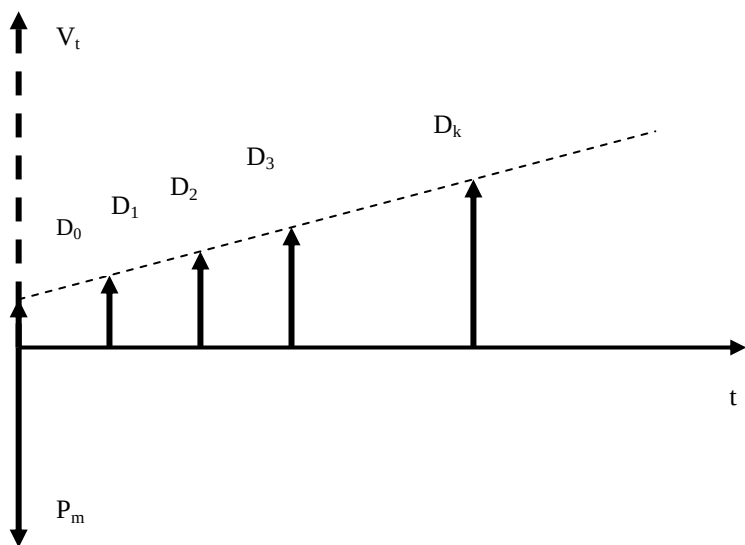


Рисунок 9.4 - Денежные потоки при оценке акции с постоянно возрастающим дивидендом

Оценка акции с произвольно меняющимся темпом изменения дивиденда может быть произведена путем прямого счета по модели Дж. Уильямса (9.5). В случае если возможно выделение периода стабильного начисления и выплаты дивидендов или периода с равномерно изменяющимся дивидендом, то оценка акции возможна в виде комбинации модели Дж. Уильямса и модели М. Гордона. Модель М. Гордона используется для периодов с равномерным изменением дивиденда, а модель Дж. Уильямса - для периодов с постоянным или произвольно меняющимся дивидендом. В любом случае оценки, полученные за отдельные периоды, должны быть приведены (продисконтированы) к началу операции.

Например, если возможно выделение двух периодов с разным, но постоянным темпом изменения дивиденда (k интервалов с темпом роста дивидендов g и $(n-k)$ интервалов с темпом роста дивидендов p), то оценку акции можно произвести по формуле:

$$V_t = D_0 \times \sum_{i=1}^k \frac{(1+g)^i}{(1+r)^i} + \frac{D_k}{(1+r)^k} \times \sum_{j=k+1}^n \frac{(1+p)^j}{(1+r)^j}. \quad (9.8)$$

Если возможно выделение периода с произвольно меняющимся дивидендом (k интервалов) и фазы равномерного роста дивиденда, то оценку акции можно произвести по следующей формуле:

$$V_t = \sum_{i=1}^k \frac{D_i}{(1+r)^i} + \frac{D_{k+1}}{r-g} \times \left(\frac{1}{1+r} \right)^k. \quad (9.9)$$

9.4. Доходность облигаций и акций

Доходность срочной облигации без права досрочного погашения. Доходность такой облигации определяется из формулы:

$$P_m = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+r)^k} + \frac{M}{(1+r)^n}. \quad (9.10)$$

Так как первое слагаемое представляет собой срочный аннуитет, то может применяться формула геометрической прогрессии:

$$P_m = CF \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{M}{(1+r)^n}. \quad (9.11)$$

Разрешая это уравнение относительно r , определяем общую доходность такой облигации. Этот показатель называют также доходностью к погашению (YTM – yield to maturity).

На практике часто пользуются формулой, которая позволяет получить приблизительную оценку YTM:

$$YTM = \frac{CF + \frac{M - P_0}{n}}{\frac{P_0 + M}{2}}, \quad (9.12)$$

где CF - купонный доход за стандартный период; M - номинальная стоимость облигации; n - число стандартных периодов до погашения облигации; P_0 - цена покупки облигации.

Доходность срочной облигации с правом досрочного погашения. Отзывная облигация характеризуется наличием выкупной цены, которая будет выплачена держателю облигации в случае ее досрочного погашения, и срока защиты от досрочного погашения. Значения доходности такой облигации определяются в зависимости от вероятности ее досрочного погашения. Если вероятность невелика, то инвестор будет ориентироваться на показатель УТМ, а если вероятность велика, то инвестор будет ориентироваться на показатель доходности досрочного погашения УТС (yield to call). Показатель УТС находится по формулам (9.11), (9.12), где учитываются период до досрочного погашения и вместо номинальной цены – выкупная цена.

Доходность конвертируемой облигации. Для оценки доходности такой облигации можно воспользоваться подходом, который используется для облигаций с правом досрочного погашения. При этом выкупная цена должна быть заменена ожидаемой конверсионной стоимостью.

Доходность акций – это относительный показатель, который характеризует эффективность инвестиционных вложений в акции. Годовой доход от владения акцией складывается из регулярного дохода, который называется дивидендом, и капитализированного дохода, который рассчитывается как разность рыночной цены акции на конец и начало года. Соответственно общая доходность акции определяется как отношение общего дохода от владения акцией к величине инвестиции в нее.

Теоретическая доходность акции может быть рассчитана с помощью модели дисконтированных денежных потоков, например по модели Уильямса.

Доходность акции с постоянным доходом. Постоянным доходом обладают привилегированные акции, а в некоторых случаях и обыкновенные акции. Для таких акций возвратный денежный поток представляет собой бессрочный аннуитет постнумерандо, и теоретическая стоимость акции рассчитывается по формуле:

$$V_t = \frac{D}{k}, \quad (9.13)$$

где D - годовой дивиденд на акцию; k - доходность акции.

В условиях равновесного рынка теоретическая стоимость акции должна быть равна ее рыночной цене и тогда доходность может быть определена как:

$$k = \frac{D}{P_m}, \quad (9.14)$$

где P_m - рыночная цена акции на момент оценки.

Предполагается, что инвестор не собирается в ближайшем буду-

щем продавать акции и поэтому общая доходность совпадает с текущей дивидендной доходностью.

Доходность акции с равномерно увеличивающимся доходом. Доходность такой акции рассчитывается путем преобразования модели Гордона (9.7).

Заменим теоретическую стоимость акции V_t ценой акции на момент оценки и решим уравнение относительно процентной ставки r , которая при условии, что инвестор в ближайшем будущем не будет продавать акцию, будет равна общей доходности акции.

$$P_0 = \frac{D_0 \times (1 + g)}{k_t - g} = \frac{D_1}{k_t - g}, \text{ отсюда}$$
$$k_t = k_{div} + k_c = \frac{D_0 \times (1 + g)}{P_0} + g = \frac{D_1}{P_0} + g. \quad (9.15)$$

Модель Гордона имеет существенные недостатки, например она не учитывает финансовые риски, что сильно влияет на ценовую динамику.

9.5 Модель оценки капитальных финансовых активов

Любой финансовый актив является рыночным товаром, и поэтому ценообразование на него подчиняется общим законам рынка. Цена на рынке формируется под влиянием ряда факторов, большая часть которых не может быть однозначно определена и оценена. Однако такие важнейшие факторы, как риск и конъюнктура рынка, могут, по крайней мере, учитываться при принятии решений о финансовых операциях.

Целесообразность приобретения того или иного финансового актива определяется соотношением теоретической стоимости актива и его рыночной цены, а следовательно, и той доходностью, которую предполагает извлечь инвестор от его использования. Однако далеко не факт, что ожидания инвестора сбудутся, поэтому, совершая операцию с активом, инвестор рискует. В определенной степени ожидания инвестора формируются под влиянием обещаний эмитента. Чем выше обещаемая доходность актива, тем выше риск ее неполучения. Тем более, что в условиях свободного рынка возможности эмитентов в определенной степени доступны для оценки и повышенная доходность может формироваться только под влиянием факторов, которые не являются общедоступными. Кроме того, существует также и общерыночный риск операций с активами.

Любой эмитент является лишь малой частью экономики, и поэтому его деятельность не может быть автономной и независимой. Тенденции, складывающиеся в экономике, оказывают влияние на производст-

венно-хозяйственную деятельность предприятий, а следовательно, и на доходность эмитируемых ими ценных бумаг.

Учитывая это, можно сделать вывод, что, оценивая капитальные финансовые активы, необходимо учитывать различного рода финансовые риски и общерыночную конъюнктуру. Этот вывод нашел реализацию в модели оценки капитальных финансовых активов.

Моделью оценки капитальных финансовых активов (capital asset pricing model, CAPM) называется модель, описывающая зависимость между показателями доходности и риска финансового актива и рынка в целом. Модель представляет собой упрощенное, но достаточно информативное выражение взаимозависимости между доходностью конкретного финансового актива и доходностями других торгуемых на рынке активов, которые в модели представлены в виде среднерыночной доходности.

Логика модели CAPM заключается в следующем. Основными индикаторами на рынке капитальных финансовых активов, используемыми инвесторами при принятии решений по их покупке и продаже, являются среднерыночная доходность k_m , безрисковая доходность k_{rf} , ожидаемая доходность ценной бумаги k_e , целесообразность операции с которой анализируется, и коэффициент β , характеризующий предельный вклад данной акции в риск рыночного портфеля. Под портфелем понимается портфель, состоящий из инвестиций во все котируемые на рынке ценные бумаги, причем пропорция вложения в конкретную ценную бумагу равна ее доле в общей капитализации рынка. В среднем для рынка $\beta=1$, для ценной бумаги, более рискованной по сравнению с рынком, $\beta>1$, а для ценной бумаги, менее рискованной по сравнению с рынком, $\beta<1$. В качестве безрисковой доходности принимают доходность долгосрочных государственных ценных бумаг.

Разность $(k_m - k_{rf})$ представляет собой рыночную премию за риск вложений средств в рыночные активы. Разность $(k_e - k_{rf})$ - это ожидаемая премия за риск вложения средств в конкретную ценную бумагу. Два этих показателя связаны между собой через коэффициент β :

$$(k_e - k_{rf}) = \beta \times (k_m - k_{rf}) . \quad (9.16)$$

Преобразовав (9.16), получим оценку ожидаемой доходности конкретной ценной бумаги:

$$k_e = k_{rf} + \beta \times (k_m - k_{rf}) . \quad (9.17)$$

Из модели следует, что чем выше риск, присущий данной фирме,

по сравнению со среднерыночным, тем больше премия, получаемая от инвестирования в ее ценные бумаги.

На практике часто используют модификацию модели CAPM:

$$k_e = k_{rf} + \beta \times (k_m - k_{rf}) + r_1 + r_2 + r_3, \quad (9.18)$$

где k_{rf} - безрисковая доходность; k_m - среднерыночная доходность; r_1, r_2, r_3 - специфические риски (страновой, валютный, вложений в малый бизнес).

Коэффициент β в формуле (9.18) рассчитывается как

$$\beta = \frac{cov(k_i, k_m)}{var(k_m)}, \quad (9.19)$$

где $cov(k_i, k_m) = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \bar{k}_i) \times (k_{mj} - \bar{k}_m)$ – ковариация между доходностью акций i -й компании и среднерыночной доходностью; $var(k_m) = \frac{1}{n} \times \sum_{j=1}^n (k_{mj} - \bar{k}_m)^2$ – вариация среднерыночной доходности.

В практике российских компаний β рассчитывается методом "восходящего β " на основе β по отраслям американской экономики с корректировкой на финансовый и операционный риск российской компании.

Модель CAPM является основным инструментом для оценки целесообразности операций с ценными бумагами. Эта модель не требует оценки ожидаемой величины дивидендов. Показатели, входящие в модель CAPM, инерционны, а их значения периодически оцениваются и публикуются агентствами по фирмам, ценные бумаги которых котируются на рынке.

Контрольные вопросы и задания

1. Что собой представляют капитальные финансовые активы?
2. В чем отличие рискового и безрискового актива?
3. При каких условиях возможно совершение операций купли-продажи финансовых активов?
4. В чем отличие долговых и долевого ценных бумаг?
5. Дайте характеристику теоретической стоимости актива.
6. Что собой представляет модель дисконтированных денежных потоков?
7. При каких условиях возможна оценка долевого ценных бумаг?
8. Дайте характеристику основных разновидностей долговых ценных бумаг.

9. В чем основные отличия привилегированных и обыкновенных акций?

10. Дайте характеристику модели Уильямса.

11. Дайте характеристику модели Гордона.

12. Дайте характеристику доходности акций и облигаций.

13. Дайте характеристику модели оценки капитальных финансовых активов (CAPM).

14. Что собой представляет коэффициент β ?

15. Как при помощи коэффициента β можно оценить финансовый риск при операциях купли-продажи финансовых активов?

16. В чем отличия модели Гордона и модели CAPM при оценке доходности капитальных финансовых активов?

17. До погашения облигации номиналом 5000 руб. с купонной ставкой 7 % и ежегодными выплатами процентов осталось два года. Значения коэффициентов дисконтирования на эти годы составляют соответственно 10 и 13 %. По какой цене должна продаваться облигация в настоящее время? Чему равна доходность к погашению облигации?

18. На рынке продаются две бескупонные облигации. Облигация А номиналом 10 тыс. руб. и сроком погашения через три года продается за 8 тыс. руб. Облигация Б номиналом 10 тыс. руб. и сроком погашения через 10 лет продается за 4,5 тыс. руб. Какая облигация более выгодна для инвестирования?

19. Рыночная цена акции на момент покупки 100 руб. Ожидаемая цена акции в конце периода владения 120 руб., а ожидаемый дивиденд в текущем году 10 руб., предполагаемый темп роста дивиденда 5 %. Период владения акцией 5 лет. Определите все виды ожидаемой доходности акции.

20. Облигация номинальной стоимостью 1000 руб. с купонной ставкой 15 % была размещена с дисконтом 10 % и куплена у первичного держателя в начале года за 950 руб. После получения купонного платежа в конце года облигация была продана за 970 руб. Ставка налога на прибыль 20 %. Определить доходность облигации.

21. Номинальная стоимость облигации 5000 руб., купонная ставка – 8 %, оставшийся срок до погашения облигации 3 года. Приемлемая норма доходности в эти годы соответственно 10, 11, 12 %. Определите текущую рыночную стоимость облигации. Чему равна доходность облигации к погашению?

ГЛАВА 10. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

10.1. Принятие решений в условиях полной неопределенности

При совершении финансовых операций степень неопределенности может быть различной. При полном отсутствии информации решения будут приниматься в условиях полной неопределенности, а в случае наличия некоторой информации, например вероятности исходов операций, ситуация будет неопределенна только частично. Рассмотрим подходы к принятию решений, как они показаны в [3].

Предположим, рассматривается возможность проведения некоторой финансовой операции, результат которой неясен. В связи с этим анализируются несколько возможных решений и их последствия. Всего рассматривается $i = 1, n$ решений в $j = 1, m$ ситуациях. Если будет принято i -е решение в j -й ситуации, то будет получен доход в размере D_{ij} .

Матрица $\|D_{ij}\|$ называется матрицей возможных решений. Подобная матрица может быть составлена и из возможных доходностей в зависимости от принимаемых решений в различных ситуациях.

В такой ситуации нет однозначного решения. Могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации. Хотя решение остается за инвестором, которое он будет принимать в зависимости от многих факторов, в том числе и от его склонности к риску. Оценим риск в данной ситуации. Так как последствия принятия инвестиционного решения неизвестны, если бы инвестор их знал, то он выбрал бы решение, которое приносит наибольший доход. Для некоторой j -й ситуации он принял бы решение, максимизирующее доход $D_j = \max_i D_{ij}$. Значит, принимая i -е решение, инвестор рискует получить не D_j , а только некоторый доход D_{ij} . При принятии i -го решения инвестор несет риск недополучить доход в размере $r_{ij} = D_j - D_{ij}$. Матрица $R = \|r_{ij}\|$ называется матрицей рисков.

Пример 10.1. Пусть матрица возможных решений есть

$$D = \begin{pmatrix} 2345 \\ 9876 \\ 3591 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу рисков, вычитая каждый элемент из макси-

мального значения в каждом столбце.

Матрица рисков будет иметь вид:

$$R = \begin{pmatrix} 7551 \\ 0020 \\ 6305 \end{pmatrix}.$$

Хотя в такой ситуации и отсутствует любая дополнительная информация, существуют некоторые правила по принятию решений [3].

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i -е решение, будем считать, что при инвестировании на самом деле можно извлечь самый маленький доход: $D_i = \min_j D_{ij}$. Тогда для максимизации дохода надо выбрать решение i_0 такое, что $D_0 = \max_i (\min_j D_{ij})$.

Пример 10.2. На основе данных примера 10.1 выбрать лучшее решение по правилу Вальда.

В примере 10.1 при принятии первого решения минимальное значение дохода $D_1 = 2$, при принятии второго решения - $D_2 = 6$, при принятии третьего решения - $D_3 = 1$. Из этих трех чисел выбираем максимальное – 6. Следовательно, по правилу Вальда надо принять второе решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков. Рассматривая i -е решение будем считать, что при инвестировании складывается ситуация максимального риска $r_i = \max_j r_{ij}$. Тогда выберем решение i_0 такое, что $r_0 = \min_i (\max_j r_{ij})$.

Пример 10.3. На основе данных примера 10.1 выбрать лучшее решение по правилу Сэвиджа.

В примере 10.1 при принятии первого решения максимальное значение риска $r_1 = 7$, при принятии второго решения - $r_2 = 2$, при принятии третьего решения - $r_3 = 6$. Из этих трех чисел выбираем минимальное – 2. Следовательно, по правилу Сэвиджа надо принять второе решение.

Правило Гурвица. В соответствии с этим правилом принимается

решение i , при котором достигается максимум

$$[\lambda \min_j D_{ij} + (1 - \lambda) \max_j D_{ij}],$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Пример 10.4. На основе данных примера 10.1 выбрать лучшее решение по правилу Гурвица.

В примере 10.1:

- при $\lambda=1/2$ $D_1 = 1/2(2+5) = 3,5$; $D_2 = 1/2(6+9) = 7,5$; $D_3 = 1/2(1+9) = 5$. Выбирая максимальное значение 7,5, видим, что в соответствии с правилом Гурвица надо выбрать второе решение;

- при $\lambda=1/4$ $D_1 = 2/4 + 3 \times 5/4 = 4,25$; $D_2 = 6/4 + 3 \times 9/4 = 8,25$; $D_3 = 1/4 + 9 \times 3/4 = 7$. Выбирая максимальное значение 8,25, видим, что в соответствии с правилом Гурвица надо выбрать второе решение;

- при $\lambda=3/4$ $D_1 = 2 \times 3/4 + 5/4 = 2,75$; $D_2 = 3 \times 6/4 + 9/4 = 6,75$; $D_3 = 3/4 + 9/4 = 3$. Выбирая максимальное значение 6,75, видим, что в соответствии с правилом Гурвица надо выбрать второе решение.

В результате выбираем второе решение.

10.2. Принятие решений в условиях частичной неопределенности

При проведении финансовых операций иногда имеется определенная информация. Например, если возможно оценить вероятность исхода совершаемой операции, то решение может приниматься на основе следующих правил [3]:

- правило максимизации среднего ожидаемого дохода;
- правило минимизации среднего ожидаемого риска.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Доход, получаемый при реализации i -го решения, является случайной величиной D_i с распределением $p_j(D_{ij})$. Математическое ожидание $M(D_i)$ и будет средним ожидаемым доходом. Тогда следует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Пример 10.5. На основе данных примера 10.1 выбрать лучшее решение по максимальному ожидаемому доходу.

Предположим, что вероятности исхода финансовых операций для примера 10.1 соответственно 1/5, 4/15, 4/15, 4/15. Тогда средний ожидаемый доход при каждом решении будет равен:

$$M(D_1) = \frac{1}{5} \times 2 + \frac{4}{15} \times (3 + 4 + 5) = 3,6 ;$$

$$M(D_2) = \frac{1}{5} \times 9 + \frac{4}{15} \times (8 + 7 + 6) = 7,4 ;$$

$$M(D_3) = \frac{1}{5} \times 3 + \frac{4}{15} \times (5 + 9 + 1) = 4,6 .$$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7,4, что соответствует второму решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска. Риск фирмы при реализации i -го решения является случайной величиной r_j с распределением $p_j(r_{ij})$. Математическое ожидание $M(r_i)$ соответствует среднему ожидаемому риску. Тогда следует принять решение, минимизирующее средний ожидаемый риск.

Пример 10.6. На основе данных примеров 10.1 и 10.5 выбрать лучшее решение на основе минимального ожидаемого риска.

Средний ожидаемый риск при каждом решении будет равен:

$$M(r_1) = \frac{1}{5} \times 7 + \frac{4}{15} \times (5 + 5 + 1) = 4,3 ;$$

$$M(r_2) = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{15} \times (0 + 2 + 0) = 0,5 ;$$

$$M(r_3) = \frac{1}{5} \times 6 + \frac{4}{15} \times (3 + 0 + 5) = 3,3 .$$

Минимальный средний ожидаемый риск равен 0,5, что соответствует второму решению.

Оптимальная (по Парето) финансовая операция. В нашем случае при определении наилучшего решения мы сталкиваемся с двумя характеристиками – средним ожидаемым доходом и средним ожидаемым риском. В принципе могут быть и другие характеристики, характеризующие финансовые операции, но методика выбора наилучшего решения от этого не может измениться. Существует несколько способов постановки и решения таких задач.

Рассмотрим оптимизационную двухкритериальную задачу в общем виде, как это показано в [3].

Пусть A – некоторое множество операций. Каждая операция a имеет две числовые характеристики $D(a), r(a)$ (в нашем случае – доход и риск), и разные операции отличаются хотя бы одной числовой

характеристикой. При выборе наилучшего решения желательно чтобы D был больше, а r меньше.

Предположим, что операция a_1 доминирует над операцией a_2 . Обозначим это как $a_1 > a_2$, если $D(a_1) \geq D(a_2)$ и $r(a_1) \leq r(a_2)$, и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Очевидно, что наилучшую операцию надо искать среди доминирующих операций. Множество этих операций называется множеством Парето, или множеством оптимальности по Парето.

На множестве Парето каждая из двух характеристик является функцией другой. Если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую. Если a_1 и a_2 принадлежат множеству Парето и $r(a_1) \leq r(a_2)$, то $D(a_1)$ не может быть равно $D(a_2)$, так как обе точки a_1 и a_2 принадлежат множеству Парето.

Покажем это на нашем примере. Каждую операцию (D, r) отметим точкой на плоскости (см. рисунок).

Чем выше точка, тем более рискованной является операция, а чем точка правее, тем больше доход по операции. Следовательно, нужно выбирать точку, лежащую как можно правее и как можно ниже. В нашем случае множество Парето состоит только из одной второй операции.

Для нахождения лучшей операции иногда используют взвешивающие функции, которые отражают отношение инвестора к доходу и риску. Например, если инвестор готов при увеличении дохода на одну единицу пойти на увеличение риска на две единицы, то взвешивающая функция будет выглядеть следующим образом: $f(D) = 2D - r$.

Пример 10.7. Используя данные примера 10.5 и 10.6, выбрать лучшее по Парето решение.

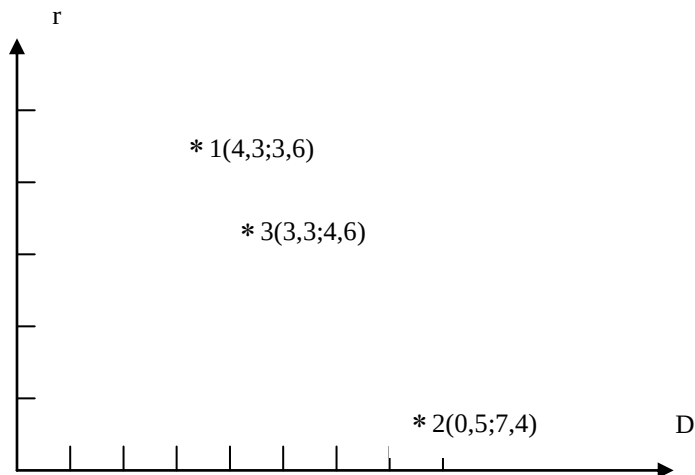
Для нашего примера будем иметь:

$$f(D_1) = 2 \times 3,6 - 4,3 = 2,9;$$

$$f(D_2) = 2 \times 7,4 - 0,5 = 14,3;$$

$$f(D_3) = 2 \times 4,6 - 3,3 = 5,9.$$

Отсюда следует, что вторая операция лучше, чем первая.



Усредненные характеристики трех финансовых операций

Контрольные вопросы и задания

1. Покажите, что собой представляют матрица возможных решений и матрица рисков.
2. Сформулируйте алгоритм действий в условиях полной неопределенности.
3. Сформулируйте правило Вальда и приведите пример.
4. Сформулируйте правило Сэвиджа и приведите пример.
5. Сформулируйте правило Гурвица и приведите пример.
6. Сформулируйте правило среднего ожидаемого дохода и приведите пример.
7. Сформулируйте правило среднего ожидаемого риска и приведите пример.
8. Дайте характеристику оптимальной по Парето финансовой операции.
9. По заданной матрице возможных решений постройте матрицу рисков

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

10. По заданной матрице возможных решений постройте матрицу рисков и определите наилучшее решение в соответствии с правилами Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

11. По заданной матрице возможных решений и вероятностям исходов возможных решений определите решение, приносящее средний ожидаемый доход.

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$p = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{6}{15} \right).$$

12. Используя данные задания 11 определите решение, обеспечивающее минимальный средний ожидаемый риск.

13. Используя данные и результаты решения заданий 11 и 12 определите лучшее по Парето решение.

ГЛАВА 11. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ В СТРАХОВАНИИ

11.1. Применение финансовых рент в страховании

При рассмотрении финансовых рент было показано, что одним из признаков их классификации является деление рент на верные и условные. В финансовой, коммерческой и производственной деятельности чаще всего встречаются процессы, описываемые верными рентами. Однако в страховании и в некоторых случаях при осуществлении инвестиционных расчетов необходимым становится применение финансовых условных рент. Основным отличием условных рент от верных является наличие некоторых условий, при которых будут осуществлены выплата или получение определенной денежной суммы. При страховании выплата элемента ренты зависит от наступления страхового события. Например, при личном страховании соответствующие денежные суммы выплачиваются только при жизни застрахованного или, наоборот, при его смерти. Заранее точно определить число таких выплат или их срок не представляется возможным.

Практически все финансовые ренты, применяемые в страховании, можно отнести к аннуитетам, т.е. элементы ренты являются одинаковыми и выплачиваются через стандартные интервалы времени.

Предположим, что по договору ренты страхователь в случае наступления страхового события имеет право получить страховую сумму в размере S , но должен заранее уплатить страхователю определенную сумму C в виде премии. Если вероятность наступления страхового события p может быть определена точно (например, на основании опыта или по аналогии), то величина премии без учета фактора времени может быть определена как

$$P = S \times p. \quad (11.1)$$

Реально премия будет превышать величину $S \times p$, так как она включает в себя также помимо чистой премии (премии нетто) величину расходов по ведению дела и прибыль страховой организации.

Математическое ожидание чистой премии с учетом фактора времени может быть определено путем дисконтирования соответствующих премиальных выплат за каждый год страхования. С учетом того, что чистая премия представляет собой денежный поток пренумерандо, текущая величина математического ожидания чистой премии будет определяться следующим образом:

$$E(P) = P \times \left[\begin{array}{l} p_1 + (1 + v) \times p_2 + \\ + (1 + v + v^2) \times p_3 + \dots \\ + (1 + v + \dots + v^{n-1}) \times p_n \end{array} \right], \quad (11.2)$$

где v – дисконтный множитель по ставке r , n – период страхования.

Страховые суммы выплачиваются в конце периода, что эквивалентно денежному потоку постнумерандо. Тогда математическое ожидание страховых выплат с учетом фактора времени может быть вычислено по формуле:

$$E(S) = S \times (v \times p_1 + v^2 \times p_2 + \dots + v^n \times p_n). \quad (11.3)$$

Для определения величины премии необходимо для обеспечения принципа финансовой эквивалентности обязательств приравнять математическое ожидание чистой премии и математическое ожидание страховых выплат. Решая полученное уравнение относительно искомой чистой премии, получаем ее величину.

Имущественное страхование отличается тем, что вероятность наступления страхового события является величиной неизменной. Математическое ожидание страховой премии и страховых выплат определяется по формулам, приведенным выше, при условии, что $p = const$.

На практике для построения денежных потоков страховых выплат и страховых премий и их математических ожиданий используются специальные методики на основе актуарных расчетов.

Методики на основе актуарных расчетов применяются при проведении расчетов при заключении договоров страхования жизни, при пенсионном страховании, при определении сумм компенсаций в случае ущерба здоровью и жизни работников при ликвидации предприятий в процедурах банкротства и др.

11.2. Методы актуарных вычислений

Актуарные вычисления основаны на определении пропорции, искомая величина которой представляет долю каждого участника финансовой сделки. Эта доля может вычисляться в виде суммы приращения или вознаграждения (роялти) или в виде процента от сделки.

В основе актуарных расчетов лежит простая пропорция:

$$\frac{S}{s} = \frac{100}{r}, \quad (11.4)$$

где S – первоначальная сумма; s – сумма приращения; r – искомая величина в процентах.

$S + s = C$ – конечная сумма, полученная в результате финансовой операции. Искомая величина в актуарных расчетах представляет собой

долю в финансовой сделке каждого ее участника, которая определяется как

$$r = \frac{(S+s) \times 100}{S} = \frac{C \times 100}{S}. \quad (11.5)$$

Конкретные актуарные вычисления сводятся к определению активов и обязательств организаций, осуществляющих заимствование (например, страховых фондов), оценке их сходимости в пространстве и времени. На основе проведенных вычислений осуществляется их корректировка в зависимости от изменяющейся ликвидности имеющихся активов и переоценке обязательств.

В практической деятельности актуарные расчеты имеют свои особенности, которые определяются схемами страховых начислений и выплат.

Особое значение и сложность имеет оценка риска, под которым понимают опасность наступления неблагоприятного исхода финансовой операции.

Результатом неверного учета риска может быть получение неотвратимого ущерба.

Если говорить о страховых операциях, то это может выразиться в формировании заниженного резерва страховых выплат или принятии завышенных обязательств, завышении или занижении процентной ставки и т.д.

Цена актуарного риска определяется множеством факторов, среди которых особую роль играют вероятность, частота страховых событий и убыточность страховой суммы.

Прежде всего необходимо точно определить понятия страхового события и страхового случая. Страховое событие – это потенциально возможное причинение ущерба застрахованному объекту. А страховой случай – это наступление определенного события или обстоятельства, в результате которого застрахованному объекту нанесен ущерб. Другими словами – это наступление события, по поводу которого и страхуется заинтересованное лицо.

Например, если застрахован объект недвижимости от пожара, то объект недвижимости будет застрахованным объектом, а пожар страховым событием. Если пожара за весь срок страхования не случится, то страховое событие не наступит, а вот если объект недвижимости сгорит, то страховое событие наступило и это следует рассматривать как страховой случай.

В актуарных расчетах используются показатели страховой статистики, которые представлены абсолютными и расчетными показателями. К основным абсолютным показателям страховой статистики отно-

сят: число объектов страхования (N), число страховых случаев (t), число пострадавших объектов в результате наступления страхового события (M), сумму собранных страховых платежей ($\sum P$), сумму выплаченного страхового возмещения ($\sum S$), страховую сумму всех застрахованных объектов ($\sum S_a$).

Основными расчетными показателями, которые используются в актуарных расчетах, являются следующие показатели:

- частота страховых случаев ($F_{ie} = t/N$), которая показывает, сколько страховых случаев приходится на один объект страхования. Если этот показатель больше единицы, то это означает, что одно страховое событие повлекло несколько страховых случаев;

- коэффициент кумуляции риска ($K_{ra} = M/t$) показывает среднее число застрахованных объектов, пострадавших от наступления страхового события, и рассчитывается как отношение числа пострадавших объектов к числу страховых случаев. Минимальное значение этого показателя равно единице; если коэффициент кумуляции больше единицы, то это указывает на то, что число страховых случаев меньше числа пострадавших объектов;

- средняя страховая сумма на один объект (договор) страхования рассчитывается как отношение общей страховой суммы всех застрахованных объектов к числу всех объектов страхования ($\bar{S} = \sum S/N$);

- средняя страховая сумма на один пострадавший объект представляет собой отношение страховой суммы всех пострадавших объектов страховой совокупности к числу этих объектов ($\bar{S}_m = \sum S_m/M$);

- тяжесть риска (SV). Тяжесть риска представляет собой отношение средней страховой суммы на один пострадавший объект к средней страховой сумме на один объект страхования. Используя данный показатель, можно оценить частоту появления страхового события;

- убыточность страховой суммы, или вероятность ущерба (LR), представляет собой отношение выплаченного страхового возмещения к страховой сумме всех объектов страхования и рассчитывается по формуле ($LR = \sum S / \sum S_a$). Значение этого показателя всегда меньше единицы, значение больше единицы недопустимо, так как это означало бы нехватку суммы страхового возмещения.

- частота ущерба ($F_d = M/N$) показывает частоту наступления страхового случая. Этот показатель характеризует частоту наступления страхового случая и всегда должен быть меньше единицы.

При установлении страховых отношений происходит операция купли - продажи страховой услуги, которая имеет свою цену. Цена страховой услуги получила название страхового тарифа. Различают брутто-ставку и нетто-ставку страхового тарифа. Брутто-ставка включает в

себя нетто–ставку и страховую нагрузку.

Нетто–ставка – это цена страхового риска, который принимает на себя страховщик. Однако фактическую величину ущерба страховщик рассчитать не может, он может только предполагать с определенной вероятностью величину ущерба в результате наступления страхового случая. В связи с этим нетто–ставка используется только для определения фонда страховых выплат. Чем больше информации у страховщика о частоте страховых случаев и величине возможного ущерба, тем точнее он может оценить возможные риски и суммы страхового возмещения.

Страховая нагрузка включает в себя расходы на ведение дела, расходы на формирование резервных фондов и прибыль страховщика.

На основе актуарных вычислений возможно определение только нетто–ставки. Величина страховой нагрузки определяется каждой страховой организацией самостоятельно с учетом своей ценовой политики и конъюнктуры рынка конкретных страховых услуг.

Пример 11.1. Определить среднюю цену страхового полиса (нетто–ставку страхового тарифа), если в текущем году на 100 страховых случаев приходилось 3 страховых события. В следующем году вероятность наступления страхового события не изменится, а сумма страхования каждого страхового случая составит 300 млн руб.

Вероятность страхового события составляет: $p(A) = \frac{3}{100} = 0,03$.

Ежегодные выплаты составят, в случае если ущерб равен или больше страховой суммы: $S = 100 \times 300 \times 0,03 = 900$ млн руб.

Средняя цена страхового полиса составит: $P = 300 \times 0,03 = 9$ млн руб.

Важнейшими элементами актуарных вычислений в страховании жизни являются таблицы смертности и коммутационные функции. Таблица смертности – это числовая модель, представленная в виде таблицы, в которой отображается уменьшение численности первоначальной группы родившихся в размере 100 000 человек и число умерших в каждой возрастной группе при сложившихся коэффициентах смертности.

Основные обозначения в таблицах смертности следующие:

- x – возраст от 0 до 100 лет;
- l_x – число доживших до “ x ” лет из первоначальной совокупности в 100 тыс. человек;
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ – число умерших в каждой возрастной группе за год;
- $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ – вероятность лицу в возрасте x умереть до достижения

возраста $x+1$;

- $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ – вероятность прожить хотя бы еще один год лицу в возрасте “ x ” лет ($p_x = 1 - q_x$);

- $L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$ – средняя численность лиц, относящихся к группе лиц в возрасте x ;

- $e_x = \frac{T_x}{l_x}$ – средняя ожидаемая продолжительность жизни лиц, относящихся к группе лиц в возрасте x .

Вероятность дожить до возраста $x + n$ лицу возраста x составит:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad (11.6)$$

где n – число лет предстоящей жизни.

Таблица 11.1 - Фрагмент таблицы смертности

Возраст, лет	l_x	d_x	q_x	p_x	e_x
0	100 000	820	0,00820	0,9918	65,258
1	99180	71	0,00072	0,9993	64,797
...	...	...	...	...	...
20	98142	175	0,00178	0,9982	46,358
...	...	...	...	...	...
40	88 725	754	0,00846	0,9925	29,927
41	88 348	741	0,00839	0,9916	29,05
...	...	...	...	...	...
59	68654	1735	0,02527	0,9747	16,424
60	66919	1886	0,02818	0,9718	15,837
...	...	...	...	...	...
70	46203	2247	0,04863	0,9514	10,646
...	...	...	...	...	...
80	22525	2141	0,09503	0,905	6,547

Пример 11.2. Определить вероятность дожития до 70 лет лица, возраст которого составляет 20 лет.

Используем данные табл. 11.1:

$${}_{23}p_{20} = \frac{l_{70}}{l_{20}} = \frac{46\,203}{98\,142} = 0,470777.$$

Для упрощения расчетов применяются коммутационные функции. Эти функции делят на две группы. В основу вычисления функций первой группы положено количество лиц, доживающих до определенного

возраста, в основу вычисления функций второй группы – количество умерших лиц.

Покажем вычисление основных коммутационных функций первой и второй группы.

Основными в первой группе являются функции D_x и N_x , которые вычисляются по формулам:

$$D_x = l_x \times v^x; \quad (11.7)$$

$$N_x = \sum_{i=x}^w D_i, \quad (11.8)$$

где w – предельный возраст, учитываемый в расчетах.

Наиболее важными во второй группе являются функции C_x и M_x :

$$C_x = d_x \times v^{x+1}; \quad (11.9)$$

$$M_x = \sum_{i=x}^w C_i. \quad (11.10)$$

Коммутационные функции (числа) в большей степени являются инструментами расчета, помогающими значительно упростить расчеты. Они сильно зависят от принятой процентной ставки.

Построим на основе фрагмента таблицы смертности (табл.11.1) таблицу, содержащую коммутационные функции (числа) при $r=5\%$.

Таблица 11.2 - Коммутационные функции (числа)

x	l_x	D_x	d_x	C_x
0	100 000	100 000	820	780,952
1	99 180	94 457,143	71	64,399
...	...	...	...	...
20	98 142	36 988,688	175	62,815
...	...	...	...	...
40	88 725	12 603,003	754	43,132
41	88 348	11951,859	741	102,002
...	...	...	...	...
59	68 654	3 859,199	1735	92,884
60	66 919	3 589,544	1886	96,16
...	...	...	...	...
70	46 203	1 518,516	2247	70,334
...	...	...	...	...
80	22 525	454,486	2141	41,142

11.3. Страхование жизни

Основными разновидностями страхования жизни являются:

- страхование на случай смерти;
- пожизненное страхование;
- страхование на дожитие;
- смешанное страхование жизни;
- страхование к сроку.

При страховании на случай смерти выплата страховой суммы, установленной договором, осуществляется, если застрахованное лицо умирает в течение срока страхования.

При пожизненном страховании срок страхования устанавливается не на конкретное число лет, а до момента смерти застрахованного и выплата страховой суммы будет произведена в любом случае.

При страховании на дожитие выплата страховой суммы осуществляется по окончании действия договора страхования. Если застрахованное лицо умирает раньше, чем закончится действие договора страхования, то выплата страховой суммы не производится.

Смешанное страхование представляет собой объединение страхования на случай смерти и страхования на дожитие.

Страхование к сроку имеет отличительную особенность. При этом виде страхования страхователь и застрахованный разные лица. Если застрахованный доживает до конца действия договора страхования, то он получает страховую сумму, установленную договором. Если страхователь умирает в течение действия договора страхования, то застрахованное лицо получит страховую сумму по окончании договора страхования. Если застрахованный умирает в течение действия договора страхования, то договор расторгается и страхователь получает определенную сумму в соответствии с условиями договора страхования.

Наиболее простым является страхование на дожитие. При этом виде страхования необходимости в применении страховых аннуитетов не возникает. Единовременная единичная нетто-ставка рассчитывается как

$${}_nE_x = {}_np_x \times v^n. \quad (11.11)$$

В случае если по договору страхования человек определенного возраста x через n лет по достижении им возраста $x+n$ должен получить сумму в размере S , то для определения размера премии (нетто-ставки) необходимо найти математическое ожидание суммы страховки, дисконтированной на срок страхования. Тогда из уравнения $P = S \times {}_np_x \times v^n$ можно определить величину премии в зависимости от величины страховой суммы.

При использовании коммутационной функции единичную нетто-

ставку можно рассчитать следующим образом:

$${}_nE_x = {}_np_x \times v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \times v^n = \frac{l_{x+n} \times v^x}{l_x \times v^x} \times v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \quad (11.12)$$

В случае если договор страхования предполагает выплату страховой суммы в размере S , то $P = S \times \frac{D_{x+n}}{D_x}$.

Пример 11.3. Найти стоимость страхования на дожитие до 70 лет на основе таблицы смертности (табл. 11.1) и коммутационных функций (табл. 11.2) лица в возрасте 20 лет.

$${}_{50}E_{20} = \frac{D_{70}}{D_{20}} = \frac{1\,518,516}{36\,988,688} = 0,04105;$$

$$P = {}_{50}E_{20} \times S = 0,04105 \times S$$

В рассматриваемом случае премия составит 4,105 % от страховой суммы.

Из приведенного примера можно сделать вывод о солидарной ответственности страхователей. Это означает, что часть суммы лица, дожившие до указанного срока получают за счет тех страхователей, которые не дожили до этого срока.

При пожизненном страховании жизни возможно несколько вариантов расчета страховой премии в зависимости от условий договора страхования. При постоянной страховой сумме могут применяться единовременная и регулярная формы оплаты. В первом случае страхователь уплачивает страховую премию один раз при заключении договора, во втором случае осуществляются регулярные выплаты страховой премии равными частями. Могут быть предусмотрены условия договора, когда взносы страхователя уплачиваются пожизненно или в течение срока, меньшего чем период страхования.

Рассмотрим расчет страховой премии в случае единовременной формы оплаты. При таких условиях страхования страховая сумма выплачивается в случае смерти застрахованного лица. Например, если страхуется лицо в возрасте x лет на сумму S , то в случае смерти на первом году страхования и выплаты страховой суммы в конце года с учетом вероятности страхового случая современная стоимость страховой суммы составит ${}_1q_x \times v \times S$. В случае смерти на втором году страхования современная стоимость страховой суммы составит ${}_2q_x \times v^2 \times S$ и т.д.

Единовременная нетто-ставка будет равна современной стоимости страхового аннуитета и рассчитывается как

$$P = S \times (q_x \times v + q_{x+1} \times v^2 + \dots + q_w \times v^{w-x}), \quad (11.13)$$

где w – предельный возраст в таблице смертности.

При использовании коммутационной функции D_x можно существенно уменьшить трудоемкость расчетов:

$$P = S \times \left(\frac{d_x}{D_x} \times v^{x+1} + \frac{d_{x+1}}{D_x} \times v^{x+2} + \dots + \frac{d_w}{D_x} \times v^w \right). \quad (11.14)$$

Применив коммутационную функцию M_x , получим:

$$P = S \times \frac{M_x}{D_x}. \quad (11.15)$$

При страховании на случай смерти возможны два варианта оплаты взносов - единовременный взнос и регулярная оплата. Принцип расчета такой же, как и в случае пожизненного страхования, но суммирование ведется не до конца таблицы смертности, а до конца срока страхования, уменьшенного на единицу.

$$P = S \times (q_x \times v + q_{x+1} \times v^2 + \dots + q_{x+n-1} \times v^{x+n-1}), \quad (11.16)$$

где n – период страхования, лет.

Контрольные вопросы и задания

1. Исходя из какого условия определяются величина страховой премии?
2. Что лежит в основе актуарных вычислений?
3. Дайте определение страховому случаю и страховому событию.
4. Приведите пример страхового случая и страхового события.
5. Перечислите основные абсолютные показатели страховой статистики.
6. Перечислите основные расчетные показатели страховой статистики.
7. В чем различие брутто-ставки и нетто-ставки страхового тарифа?
8. Что из себя представляет таблица смертности в страховании?
9. Что из себя представляют коммутационные функции (числа) в страховании?
10. Перечислите основные разновидности страхования жизни и дайте их характеристику.
11. Определите вероятность дожития до 60 лет лица, возраст которого составляет 40 лет.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баранова, А.Д. Актуарные расчеты в страховании жизни : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А.Д. Баранова. – Москва : Изд-во Юрайт, 2019. – 194 с. – (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-09233-2.

2. Бочаров, П.П. Финансовая математика : учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – Москва : Гардарика, 2002. – 624 с.

3. Бригхем, Ю. Финансовый менеджмент: Полный курс: в 2-х т. / Ю. Бригхем, Л. Гапенски. – Пер. с англ. под ред. В.В. Ковалева. – Санкт-Петербург : Экономическая школа, 1997. – 1 187 с. – ISBN 0-03-075482-8, ISBN 5-900428-30-3.

4. Бурда, А.Г. Финансовые вычисления : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 080105.65 «Финансы и кредит», 080109.65 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», 080507.65 «Менеджмент организации» / А.Г. Бурда. — Краснодар: Южный институт менеджмента, 2013. — 57 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/25996.html> (дата обращения: 09.01.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

5. Ван Хорн, Дж. К. Основы финансового менеджмента / Дж. К. Ван Хорн, Д.М. Вахович мл. – 12-е изд. : Пер. с англ. - Москва : «И.Д. Вильямс», 2008. – 1232 с. – ISBN 978-5-3499-1074-5.

6. Зверькова, Т.Н. Финансовые вычисления в банковском деле : учебное пособие / Т.Н. Зверькова, И.В. Горина. — Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011. — 118 с. — ISBN 978-5-91854-057-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. URL: <http://www.iprbookshop.ru/30139.html> (дата обращения : 09.01 2021). – Режим доступа: для авторизир. пользователей.

7. Есаков, М.М. Основы финансовых вычислений (бакалавриат) : учеб. пособие / М.М. Есаков. – Москва : Изд-во «Ваш полиграфический партнер», 2015. – 129 с. – ISBN 978-5-4253-0802-3.

8. Кирилица, В.П. Финансовая математика : руководство к решению задач / В.П. Кирилица. – Москва : ТетраСистемс, 2005. - 192 с. – ISBN 985-470-354-1.

9. Ковалев, В.В. Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалев, В.А. Уланов. – 4-е изд.- Москва : Проспект, 2014. – 560 с. – ISBN 978-5-392-12271-4.

10. Ковалев, В.В. Курс финансового менеджмента : учебник / В.В. Ковалев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Проспект, 2011. – 480 с. –

ISBN 978-5-392-01613-6.

11. Красина, Ф.А. Финансовые вычисления : учебное пособие / Ф.А. Красина. — Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2015. — 190 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72212.html> (дата обращения 09.01.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

12. Кузнецов, Б.Т. Финансовая математика : учебное пособие / Б.Т. Кузнецов. — Москва : Экзамен, 2005. — 128 с. — ISBN 5-472-00153-6.

13. Малыхин, В.И. Финансовая математика : учебное пособие для вузов / В.И. Малыхин. - 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юнити - Дана, 2003. — 237 с. — ISBN 5-238-00559-8.

14. Просветов, Г.И. Экономика предприятия : задачи и решения : учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. — Москва : Изд-во «Альфа – Пресс», 2008. —557 с. — ISBN 978-5-94280-300-1.

15. Симчера, В.М. Финансовые и актуарные вычисления : учебно-практическое пособие / В.М. Симчера. — Москва : Изд-во «Маркетинг», 2002. — 556 с. — ISBN 5-94462-202-4.

16. Сеницын, Е.В. Приемы финансовых вычислений в условиях определенности. Практикум : учебное пособие / Е.В. Сеницын. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 64 с. — ISBN 978-5-7996-1329-7. Текст : электронный // Электронно- библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/68279.html> (дата обращения 09.01.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

17. Финансовая математика : учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина. - 2-е изд., стер. — Москва : КНОРУС, 2013. — 224 с. (Бакалавриат). — ISBN 978-5-406-02644-1.

18. Финансовый менеджмент : учебник / коллектив авторов ; под ред. проф. Е.И. Шохина. - 4-е изд., стер. — Москва : КНОРУС, 2017. — 476 с. — (Бакалавриат). — ISBN 978-5-406-05520-5.

19.Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е.М. Четыркин. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Изд-во Дело Лтд, 1995. - 320 с. — ISBN 5-86461-187-5.

20. Четыркин, Е.М. Финансовая математика : учебник / Е.М. Четыркин. - 4-е изд. — Москва : Дело, 2004. — 400 с. — ISBN 5-7749-0193-9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ.....	5
1.1.Временная стоимость денег в финансовых и коммерческих расчетах.....	5
1.2. Нарращение, дисконтирование и учет.....	7
1.3. Нарращение с использованием простых процентов.....	9
1.4. Дисконтирование и учет с использованием простых процентов.....	11
1.5.Переменная сумма счета и расчет процентов.....	16
ГЛАВА 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ.....	19
2.1. Нарращение с использованием сложных процентов.....	19
2.2. Внутригодовое начисление процентов.....	22
2.3. Дисконтирование и учет на основе сложных процентов.....	25
2.4. Непрерывное начисление процентов.....	27
2.5. Определение срока платежа и величины процентной ставки..	29
2.6. Учет инфляции при наращении и дисконтировании.....	32
ГЛАВА 3. КОНВЕРТАЦИЯ ВАЛЮТЫ И НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ.....	39
3.1. Конвертация валюты и начисление простых процентов.....	39
3.2. Конвертация валюты и начисление сложных процентов.....	45
ГЛАВА 4. КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ.....	51
4.1. Финансовая эквивалентность обязательств.....	51
4.2. Консолидация задолженности.....	54
4.3. Эквивалентность процентных ставок.....	59
ГЛАВА 5. ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ.....	63
5.1. Виды финансовых рент.....	63
5.2. Формулы наращенной суммы финансовой ренты.....	66
5.3. Формулы современной величины финансовой ренты.....	71
5.4. Определение параметров финансовой ренты.....	72
5.5. Особые случаи постоянных рент.....	78
5.6. Переменные денежные потоки.....	82
5.7. Конверсия аннуитетов.....	89
ГЛАВА 6. КРЕДИТНЫЕ ОПЕРАЦИИ.....	98
6.1. Погашение задолженности частями.....	98
6.2. Долгосрочные кредиты.....	100
6.3. Ссудные и учетные операции с удержанием комиссионных..	105
6.4. Льготные займы и кредиты.....	107

6.5. Фрофейтная кредитная операция.....	108
6.6. Ипотечные ссуды.....	116
6.7. Потребительские кредиты.....	119
ГЛАВА 7. ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.....	124
7.1. Определение оптимального уровня денежных средств.....	124
7.2. Инвестиционно-финансовый анализ.....	127
7.3. Аренда оборудования (лизинг).....	134
ГЛАВА 8. ДОХОДНОСТЬ И РИСК ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ..	139
8.1. Доход и доходность финансовых операций.....	139
8.2. Риск финансовой операции.....	141
8.3. Методы уменьшения риска финансовых операций.....	145
ГЛАВА 9. КАПИТАЛЬНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ.....	152
9.1. Понятие капитальных финансовых активов.....	152
9.2. Оценка долговых ценных бумаг.....	154
9.3. Оцуека долевых ценных бумаг.....	158
9.4. Доходность облигаций и акций.....	161
9.5. Модель оценки капитальных финансовых активов.....	163
ГЛАВА 10. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	167
10.1. Принятие решений в условиях полной неопределенности...	167
10.2. Принятие решений в условиях частичной неопределенно- сти.....	169
ГЛАВА 11. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ В СТРАХОВАНИИ.....	174
11.1. Применение финансовых рент в страховании.....	174
11.2. Методы актуарных вычислений.....	175
11.3. Страхование жизни.....	181
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	184

Е с а к о в Михаил Михайлович

Финансовые вычисления

Редактор Р.К. Мангутова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 30.07.21. Формат бумаги 60x84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл.печ.л. 11,75

Тираж 100 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина.

390005, Рязань, ул.Гагарина,59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.